TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA.

UNA LECTURA INICIAL

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Panchapagesan Thiruvaiyaru, Venkataramaiyer
Carlos Eduardo Cova Salaya
Zoraida Margarita Sivoli Barrios

2022

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA. UNA LECTURA INICIAL

©2022 Panchapagesan Thiruvaiyaru, Venkataramaiyer
Carlos Eduardo Cova Salaya
Zoraida Margarita Sivoli Barrios

2022

TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA.
UNA LECTURA INICIAL

Carlos Eduardo Cova Salaya
Zoraida Margarita Sivoli Barrios
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

2022
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA. UNA LECTURA INICIAL
Riobamba, Ecuador
Dirección de Publicaciones Científicas, 2022
ISBN: 978-9942-42-541-6
Fecha de Publicación: 2022-08-02

Introducción

Después de la publicación de la monografía fundamental de Lebesgue [26], en 1904, han aparecido muchos libros sobre la teoría de la Medida e Integración. Algunos textos, como por ejemplo [11], [23] y [30], estudian solamente la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$. Otros, en cambio, tratan la Teoría General de la Integración, y por la selección de temas y métodos que adoptan, pueden ser clasificados, en términos generales, dentro de los grupos siguientes:

(I) Los que comienzan con la teoría de la medida en $\sigma-$álgebras o en $\sigma-$anillos de subconjuntos de un conjunto X, y luego siguen con la teoría de funciones medibles e integrables (escalares o vectoriales).

(II) Aquellos que enfocan la integral como un funcional lineal, comenzando con una integral elemental I en un retículo vectorial F de funciones reales definidas en un conjunto X, extendiéndola luego a un dominio más amplio. (Este enfoque se originó en el trabajo de Daniell [7], del año 1918, y es conocido como la teoría de la integral de Daniell).

(III) Aquellos que construyen la teoría de la Integral a partir de un funcional lineal y continuo definido en cierto espacio localmente convexo de funciones. Más precisamente, sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, y $C_C(X)$ el espacio vectorial de todas las funciones complejas continuas en X con soportes compactos. Si $\mathbb{K}$ es la familia de todos los compactos en X, entonces a cada $K \in \mathbb{K}$ se le asocia el espacio normado $\mathbb{K}(X,K) = \{f \in C_C(X) : \text{sop}(f) \subset K\}$ con norma $\|f\|_u = \sup_{x\in X} |f(x)|$, y se define el espacio localmente convexo $\mathbb{K}(X) = (C_C(X), \tau)$, donde τ es la topología de límite inductivo estricto inducida por los espacios $\mathbb{K}(X,K)$, $K \in \mathbb{K}$. Fijando un elemento θ del dual $\mathbb{K}(X)^\star$ se desarrolla entonces la teoría de la integración de funciones escalares y vectoriales definidas en X, y luego se introduce la noción de medida. (Este enfoque, que se debe a Bourbaki [6], predomina en la escuela francesa, y las medidas así obtenidas se llaman las medidas positivas o complejas de Radon).

Existen también tratados (por ejemplo [19] y [34]) que estudian la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$ mediante una sabia combinación de los enfoques (I) y (III). Además, en la literatura se encuentran estudios muy especializados de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$, como por ejemplo [11], [23], [24], [30] y [31] o [28]. En el último se expone también la integral de Bochner en $\mathbb{R}^n$. En [27], la medida de Lebesgue y las medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$ son tratadas por el enfoque (II), tomando como retículo vectorial F el espacio $C_C(\mathbb{R}^n)$ y como integrales elementales a las de Riemann-Stieltjes. En [39] se tratan los enfoques (I) y (II) y las interrelaciones entre ellos.

Uno de los objetivos principales del presente tratado es iniciar el estudio relativo al enfoque (I), en posteriores entregas tenemos planeado continuar y profundizar el estudio de este enfoque y los enfoques (II) y (III), con sus interrelaciones. Mientras que las teorías (I) y (II) pueden darse sin ningún pre-requisito topológico sobre el conjunto X, la (III) exige que X sea localmente compacto y de Hausdorff.

Esta lectura inicial, consta de dos capítulos. El capítulo 0 de preliminares incluye los tópicos necesarios para el desarrollo del estudio de la teoría abstracta de la medida. Estos son los correspondientes a la teoría de conjuntos, relaciones y funciones, números cardinales, conceptos algebraicos, espacios topológicos, análisis real y espacios normados. En el capítulo 1, comenzamos el estudio de la teoría abstracta de la medida, con la motivación de la noción de medidas en intervalos de $\mathbb{R}$ y luego desarrollar la teoría sobre anillos, σ-anillos y clases monótonas.

A continuación resumimos el contenido tratado, destacando algunos de sus aspectos más importantes, que justifican la anexión de un tratado inicial de esta naturaleza a la vasta literatura existente sobre el tema:

1. En general, el lector se siente incómodo cuando se imponen conceptos de una teoría abstracta sin una motivación adecuada. En vista de esto, para motivar la teoría abstracta de la medida se resumen brevemente, en lugares apropiados, algunas ideas y resultados claves de la teoría clásica de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

2. Como los resultados más profundos y útiles de la teoría necesitan de una estructura topológica en el espacio, se introduce ya desde el capítulo 1 el estudio de las medidas en espacios topológicos, junto a una exposición adecuada de los tópicos siguientes:

   La equivalencia del axioma de elección con otros axiomas en la teoría de conjuntos; números ordinales; inducción transfinita y recursión transfinita; construcción de $\sigma-$anillos generados, etc.

Caben algunos comentarios sobre la forma en que están elaboradas los dos capítulos del tratado:

1. El capítulo 1 contiene una sección con 16 problemas resueltos, en los cuales se

incluyen contraejemplos y resultados que extienden o complementan los temas tratados en las secciones que lo conforman.

2. Además de dar pruebas muy detalladas, cada concepto se introduce, en la medida de lo posible, con una *adecuada motivación* para que el lector se sienta cómodo con las diferentes abstracciones y generalizaciones. Corriendo el riesgo de redundancia, se prefiere deducir un mismo resultado por varios métodos con el propósito de familiarizar al lector con *diversas técnicas* del área.

3. El capítulo 1 culmina con una selección de ejercicios concebidos para ayudar al lector a aplicar la teoría en situaciones particulares y así dominarla. Cuando el ejercicio no puede deducirse como una consecuencia inmediata de los teoremas expuestos, se incluye ayuda para su solución.

4. El contenido desarrollado en el capítulo 1 del texto puede ser leído con un conocimiento adecuado de la Topología y Análisis de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Para ayudar al lector, en el capítulo 0, se resumen los resultados y las definiciones más relevantes de dichas áreas.

5. Los teoremas principales y varios de los problemas resueltos tienen al lado una descripción con el fin de fijar sobre ellos la atención del lector y también para facilitar su referencia.

Finalmente, los autores agradecerán al lector por cualquier sugerencia que sea formulada para el mejoramiento del texto.

Los Autores

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Índice general

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo fijemos la notación y la terminología que usaremos en todo el texto. También damos algunas definiciones y resultados básicos, sin demostración, de la teoría de conjuntos, del álgebra moderna, de la topología, del análisis en $\mathbb{R}$ y del análisis funcional que se necesitarán implícitamente en el desarrollo del texto con el propósito de hacer el tratamiento razonablemente autocontenido.

0.1. Conjuntos

Escribimos $x \in A$ para indicar que el elemento x pertenece al conjunto A; cuando x no pertenece al conjunto A escribimos $x \notin A$. A veces también escribimos $A \ni x$ y $A \not\ni x$, respectivamente. Cuando $x \in A$ e $y \in A$, escribimos $x,\, y \in A$.

Si todos los elementos del conjunto A son $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$ entonces A se denota por $\{x_1, \ldots, x_n\}$ donde no se excluye la posibilidad de que $x_i = x_j$ para algunos $i \neq j$.

El conjunto cuyo único elemento es x se denota por $\{x\}$ y se llama un *conjunto unitario o singulete*.

El conjunto vacío se denota por $\emptyset$.

Sean A y B conjuntos. Si cada elemento de A pertenece a B, decimos que A es un *subconjunto* de B y escribimos $A \subset B$ ó $B \supset A$.

Decimos que A y B son iguales ($A = B$ en símbolos) si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Si $A \subset B$ y existe $x \in B$ tal que $x \notin A$, entonces A se llama un *subconjunto propio* de B y decimos que A está estrictamente contenido en B y escribimos $A \subsetneqq B$ y $B \supsetneqq A$.

Si A no es subconjunto de B, entonces escribimos $A \not\subset B$.

Nótese que el vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

Sea X, un conjunto fijo, $X \neq \emptyset$. Decimos que X es el *conjunto universo* si todos los subconjuntos considerados son subconjuntos de X.

Para cada $x \in X$, sea $P(x)$ una proposición. Entonces $\{x \in X : P(x)\}$ denota al subconjunto de los $x \in X$ para los cuales la proposición $P(x)$ es cierta. Cuando no hay confusión sobre el conjunto universo X, escribimos simplemente $\{x : P(x)\}$.

Un conjunto cuyos elementos son subconjuntos del conjunto universo X se llama una *clase, familia o colección* de subconjuntos de X. A veces los elementos de una clase se llaman miembros de la clase.

La clase de todos los subconjuntos de X se llama la *parte* de X y se denota por $\mathcal{P}(X)$.

Definición 0.1.1. *Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Definimos*

1. *La* Unión *de A y B al conjunto*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

2. *La* Intersección *de A y B al conjunto*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

3. *El* Complemento *de A (en X) al conjunto*

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

4. *La* Diferencia *$A \setminus B$ por*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap B^c.$$

Así, $A^c = X \setminus A$.

5. *La* Diferencia simétrica *de A y B se define por*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Decimos que A y B son disjuntos *si $A \cap B = \emptyset$.*

Teorema 0.1.2. *Sean A, B, $C \in \mathcal{P}(X)$. Entonces:*

1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) $A \subset B$.

b) $A \cap B = A$.

c) $B = A \cup B$.

d) $B^c \subset A^c$.

e) $A \cap B^c = \emptyset$.

f) $A^c \cup B = X$.

2. $A = (A^c)^c$. *Denotaremos a* $(A^c)^c$ *por* A^{cc}.

3. Leyes conmutativas.
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

4. Leyes asociativas.
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

5. Leyes distributivas.
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Las Leyes de De Morgan.
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Definición 0.1.3. *Para cada elemento i de un conjunto $I(\neq \emptyset)$, supóngase que se da un conjunto A_i. Entonces I se llama un* conjunto de índices.

1. *La unión de los A_i, $i \in I$ se denota por $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ o $\bigcup_{i\in I} A_i$ y es el conjunto*
$$\{x : x \in A_i \ \textit{para algún} \ i \in I\}.$$

2. *La intersección de los A_i, $i \in I$ se denota $\bigcap\{A_i : i \in I\}$ o $\bigcap_{i\in I} A_i$ y es el conjunto*
$$\{x : x \in A_i \ \textit{para todo} \ i \in I\}$$

3. *La familia $\{A_i\}_{i\in I}$ se llama* disjunta *si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i, j \in I$ con $i \neq j$.*

Un caso particular surge cuando el conjunto de índices es una clase $\mathcal{C}$ de conjuntos. Para cada $C \in \mathcal{C}$, definamos $A_C = C$. Entonces

$$\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\} = \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}$$

y

$$\bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\} = \{x : x \in C \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}.$$

Teorema 0.1.4. *Sea I un conjunto de Índices y para cada $i \in I$ sea A_i un subconjunto del conjunto universo X.*

1. *Si $\emptyset \neq J \subset I$, entonces*

$$\bigcup\{A_j : j \in J\} \subset \bigcup\{A_i : i \in I\}$$

y

$$\bigcap\{A_j : j \in J\} \supset \bigcap\{A_i : i \in I\}.$$

2. Las leyes de De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i$$

y

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

El conjunto de todos los números enteros positivos se denota por $\mathbb{N}$ y la colección de todos los números enteros por $\mathbb{Z}$. Además, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, \dots\}$.

Definición 0.1.5. *Si a cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna un conjunto A_n, entonces la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama una* sucesión de conjuntos *y escribimos $\{A_n\}_1^\infty$ o $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.*

La unión y la intersección de los A_n se denotan por

$$\bigcup_1^\infty A_n \quad \text{o} \quad \bigcup_{n=1}^\infty A_n$$

y

$$\bigcap_1^\infty A_n \quad \text{o} \quad \bigcap_{n=1}^\infty A_n\,,$$

respectivamente.

La unión $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ y la intersección $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ se denotan también por

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{y} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n,$$

respectivamente.

Definición 0.1.6. *La sucesión* $\{A_n\}_1^\infty$ *de conjuntos se llama* no decreciente *(denotada por* $A_n \uparrow$*) si* $A_n \subset A_{n+1}$ *para todo* n.

De manera similar se define una sucesión $\{A_n\}_1^\infty$ no creciente *y en tal caso escribimos* $A_n \downarrow$.

Cuando $A_n \uparrow$ *(resp.* $A_n \downarrow$*) escribimos* $A_n \uparrow A$ *si* $A = \bigcup_1^\infty A_n$ *(resp.* $A_n \downarrow A$ *si* $A = \bigcap_1^\infty A$*).*

Decimos que $\{A_n\}_1^\infty$ *es* monótona *si* $A_n \uparrow$ *o* $A_n \downarrow$.

0.2. Relaciones y Funciones

Definición 0.2.1. *El* producto cartesiano *de dos conjuntos* X *e* Y *es el conjunto* $X \times Y$ *de todos los pares ordenados* (x, y) *tales que* $x \in X$ *e* $y \in Y$.

Decimos que x es la primera coordenada e y es la segunda de (x, y).

Escribimos $(x, y) = (u, v)$ si y sólo si $x = u$ e $y = v$. Así, $(1, 2) \neq (2, 1)$ como elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, aunque $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ como subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición 0.2.2. *Una* relación *es un conjunto de pares ordenados. Es decir, una relación es un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos.*

Sea $R \subset X \times Y$, una relación. El dominio de R (dom R) es

$$\text{dom } R = \{x \in X : (x, y) \in R \text{ para algún } y \in Y\}$$

y el rango de R(Rgo R) es

$$\text{Rgo } R = \{y \in Y : (x, y) \in R \text{ para algún } x \in X\}.$$

Usamos la notación convencional xRy para indicar que $(x, y) \in R$.

Definición 0.2.3. *Una* relación de equivalencia *en* X *es cualquier* $R \subset X \times X$ *tal que para todo* x, y, z *en* X *se tienen:*

1. xRx *(*reflexiva*).*
2. $xRy \Rightarrow yRx$ *(*simétrica*) (* $\Rightarrow$ *es implica que).*

3. *Si* xRy *e* yRz *entonces* xRz *(*transitiva*).*

Usualmente una relación de equivalencia se denota por $\sim$.

Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, sea

$$\tilde{x} = \{y \in X : x \sim y\}.$$

El conjunto $\tilde{x}$ se llama la *clase de equivalencia* determinada por x. Para cada par x, y en X tenemos

$$\tilde{x} = \tilde{y} \quad \text{ó} \quad \tilde{x} \cap \tilde{y} = \emptyset.$$

Así, X es la unión disjunta de todas las clases de equivalencia.

Teorema 0.2.4. *Una relación* R *con dom* $R = X$ *es una relación de equivalencia en* X *si y, sólo si, existe una familia disjunta* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* X *tal que*

$$R = \bigcup\{C \times C : C \in \mathcal{C}\}.$$

Los conceptos de orden parcial y de orden total son relaciones importantes que serán tratados detalladamente más adelante en la sección 5 del capítulo 1.

Si R es una relación en X, entonces

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$$

se llama la *relación inversa* de R.

Definición 0.2.5. *Una relación* R *en* X *se llama una* función *si* R *satisface la propiedad:*

$$\textit{Si } xRy \textit{ y } xRz \textit{ entonces } y = z.$$

También usamos la terminología *aplicación, transformación, operación o correspondencia* en lugar de función.

Si f es una función y $x \in \operatorname{dom} f$, entonces el elemento $f(x)$ tal que $(x, f(x)) \in f$ se llama el *valor* de f en x o la *imagen* de x por la función f.

Si f es una función con $\operatorname{dom} f = X$ y $\operatorname{rgo} f \subset Y$, entonces escribimos $f : X \to Y$ y decimos que f es una función de X en Y.

Cuando $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$, la función f se llama *inyectiva*; y cuando $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = Y$ decimos que $f : X \to Y$ es *sobreyectiva* o que f es de X *sobre* Y. La función f se llama *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

El rango $f(X)$ de f también se conoce como la imagen de X bajo f.

Dado $B \subset Y$, definimos el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

y se llama la *imagen inversa* de B relativa a f.

Teorema 0.2.6. *Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Sean A, $\{A_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de X y B, $\{B_j\}_{j\in J}$ subconjuntos de Y. Entonces:*

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = f \bigcup_{i\in I}(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. *Si f es inyectiva, entonces* $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
5. $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$.
6. *Si f es inyectiva, entonces* $f(X\backslash A) = f(X)\backslash f(A)$.

   Si f es biyectiva, entonces $f(X\backslash A) = Y\backslash f(A)$; esto es, $f(A^c) = (f(A))^c$.

Definición 0.2.7. *Dadas las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, definimos la* composición *de f con g como la función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$.*

Es claro que $g \circ f$ es una función con dominio X y rango contenido en Z.

$\mathbb{R}$ denota al conjunto de todos los números reales.

$\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ y $\mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$.

Definición 0.2.8. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama* no decreciente *(resp.* no creciente*) si*

$$x < y \textit{ implica que } f(x) \leq f(y) \textit{ (resp. } f(y) \leq f(x)\textit{)}.$$

El conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Si $f : X \to \mathbb{R}$ (resp. $f : X \to \mathbb{C}$) decimos que f es una función real (resp. compleja).

Definición 0.2.9. *Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función, las funciones $Re\ f$ (*parte real *de f), $Im\ f$ (*parte imaginaria *de f) y $|f|$ (*modulo *de f) se definen por*

$$(Re\ f)(x) = Ref(x),\ (Im\ f)(x) = Im\ f(x) \text{ y } |f|(x) = |f(x)|,\ x \in X,$$

donde para un número complejo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$$Re\ z = x,\ Im\ z = y \ \text{y}\ |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}\ .$$

Definición 0.2.10. *Si* $f : X \to Y$ *y* $A \subset X$, *entonces la* restricción *de* f *a* A *es la función* $f|_A : A \to Y$ *dada por* $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$.

Definición 0.2.11. *Si* $g : A \to Y$ *y existe una función* f *con* $\text{dom}\ f = B \subset X$ *y* $A \subset B$, *entonces decimos que* f *es una* extensión *de* g *siempre que* $f(x) = g(x)$, $x \in A$ *o equivalentemente,* $g = f|_A$.

0.3. Números Cardinales

A cada conjunto A le asociamos un símbolo, llamado el *número cardinal* de A, tal que dos conjuntos A y B tienen asociado el mismo símbolo si y sólo si, existe una función inyectiva f con $\text{dom}\ f = A$ y $\text{rgo}\ f = B$. Escribimos $|A|$ para denotar al número cardinal de A. (Este símbolo no tendrá confusión con el símbolo del valor absoluto de un número complejo o de la norma de un vector en un espacio normado).

Definición 0.3.1. *Decimos que los conjuntos* A *y* B *son* equivalentes *y escribimos* $A \approx B$ *si existe una función biyectiva* $f : A \to B$. *Por lo tanto, dos conjuntos equivalentes tienen el mismo número cardinal.*

Sean $\aleph$ y $\aleph'$ números cardinales y sean A y B conjuntos tales que $|A| = \aleph$ y $|B| = \aleph'$. Escribimos $\aleph \leq \aleph'$ (o equivalentemente, $\aleph' \geq \aleph$) si existe una función inyectiva $f : A \to B$. Escribimos $\aleph < \aleph'$ o $\aleph' > \aleph$ si $\aleph \leq \aleph'$ y $\aleph \neq \aleph'$.

Teorema 0.3.2. *Sean* $\aleph$, $\aleph'$, $\aleph''$ *números cardinales. Entonces:*

1. $\aleph \leq \aleph$.
2. $\aleph \leq \aleph'$ *y* $\aleph' \leq \aleph''$ *implican que* $\aleph \leq \aleph''$.
3. (Schröder-Bernstein) *Si* $\aleph \leq \aleph'$ *y* $\aleph' \leq \aleph$ *entonces* $\aleph = \aleph'$.
4. $\aleph \leq \aleph'$ *ó* $\aleph' \leq \aleph$.
5. *Si* E *es un conjunto de números cardinales, entonces* E *es totalmente ordenado con respecto a* $\leq$. *(Ver la sección 5 del capítulo 1).*

El resultado 5 del teorema anterior es una consecuencia del *axioma de elección* el cual será tratado detalladamente en 1.5.

Definición 0.3.3. *Un conjunto* A *se llama* finito *si* $A = \emptyset$ *o si* A *es equivalente con el conjunto* $\{1, \ldots, n\}$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *y en este último caso definimos* $|A| = n$.

Cuando $A = \emptyset$, $|A| = 0$.

Decimos que el conjunto A es infinito *si A no es finito.*

Notación 0.3.4. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ *y* $|\mathbb{R}| = c$.

Definición 0.3.5. *Un conjunto A se llama* numerable *si A es infinito y $|A| = \aleph_0$.*

Decimos que A es a lo sumo numerable *si A es finito o A es numerable.*

Cuando $|A| = \aleph_0$, también diremos que A es numerablemente infinito.

Si A es numerablemente infinito y $f : \mathbb{N} \to A$ es biyectiva, entonces la sucesión $(a_n)_1^\infty$ donde $a_n = f(n)$ se llama una *enumeración* de A. Nótese que $a_n \neq a_m$ si $n \neq m$.

Definición 0.3.6. *Decimos que A es un conjunto* no numerable *si $|A| > \aleph_0$.*

Definición 0.3.7. *Sean $\aleph$, $\aleph'$ números cardinales. Sean A, B conjuntos tales que $|A| = \aleph$ y $|B| = \aleph'$.*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$, definimos $\aleph + \aleph' = |A \cup B|$.*
2. *Definimos $\aleph\aleph' = |A \times B|$ y $\aleph^{\aleph'} = |A^B|$, donde A^B es el conjunto de todas las funciones $f : B \to A$.*

De los diversos resultados que existen sobre los números cardinales los más necesarios pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 0.3.8. *Sean $\aleph$, $\aleph'$ y $\aleph''$ números cardinales infinitos.*

1. *Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerablemente infinito.*
2. $\aleph_0 \leq \aleph$.
3. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.*
4. *Una unión numerable de conjuntos numerables también es numerable.*
5. *El conjunto de todos los números racionales en (a, b), es numerable para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.*
6. *$\mathbb{R}$ no es numerable y, por lo tanto, $\aleph_0 < c$.*
7. *$\aleph_0^n = \aleph_0$, donde $\aleph_0^n = \aleph_0 \times \cdots \times \aleph_0$* (n-veces).
8. $2^{\aleph_0} = c$.
9. *$\alpha + \aleph_0 = \aleph_0$ si $\alpha \leq \aleph_0$, α un número cardinal.*
10. $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$, $\aleph + \aleph = \aleph$.
11. *$\aleph < 2^\aleph$ si $\aleph$ es finito ó infinito.*
12. *$\aleph + \aleph' = \aleph'$ si $\aleph \leq \aleph'$, donde $\aleph$ puede ser finito.*

13. $\aleph^2 = \aleph$ *y así* $\aleph^n = \aleph$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

14. $\aleph\aleph' = \aleph'$ *si* $0 < \aleph \leq \aleph'$. *($\aleph$ puede ser finito).*

15. a) $(\aleph)^{\aleph''}(\aleph')^{\aleph''} = (\aleph\aleph')^{\aleph''}$.

    b) $\left((\aleph)^{\aleph'}\right)^{\aleph''} = \aleph^{\aleph'\aleph''}$.

16. $\aleph \leq \aleph' \Rightarrow (\aleph)^{\aleph''} \leq (\aleph')^{\aleph''}$ *y* $(\aleph'')^{\aleph} \leq (\aleph'')^{\aleph'}$.

El conjunto $\mathbb{N}$ con el orden usual, tiene la propiedad de que cada subconjunto no vacío contiene su menor elemento. Esta propiedad se estudiará más adelante en 1.5, en conexión con los números ordinales. Una consecuencia de esta propiedad es el *principio de inducción finita* cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 0.3.9. (Principio de inducción finita). *Supóngase que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *la proposición* $P(n)$ *con respecto a* n *es cierta o falsa. Si* $P(1)$ *es cierta y* $P(n+1)$ *es cierta siempre que* $P(n)$ *sea cierta, entonces* $P(n)$ *es cierta para todo* n.

El teorema de inducción transfinita que será tratado más adelante en 1.5, es una generalización del teorema anterior.

0.4. Conceptos Algebraicos

En esta sección damos algunas definiciones y resultados del álgebra moderna. La mayoría de estos conceptos y resultados serán necesarios para una mejor comprensión y desarrollo de los problemas resueltos y en los ejercicios propuestos.

Definición 0.4.1. *Un grupo es un par* $(G, \cdot)$ *en el cual* G *es un conjunto no vacío y "$\cdot$", llamada la operación del grupo, es una función*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. *La operación es asociativa, esto es,* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *para todo* $x, y, z \in G$.

2. *Existe un* elemento neutro $e \in G$, *tal que* $e \cdot x = x = x \cdot e$ *para todo* $x \in G$ *(e también se llama* la identidad *del grupo).*

3. *Para cada* $x \in G$ *existe un* elemento inverso $x^{-1} \in G$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Cuando $x \cdot y = y \cdot x$ *para todo* $x, y \in G$, *decimos que* $(G, \cdot)$ *es un* grupo abeliano *o* grupo conmutativo.

Si no hay confusión, el símbolo " $\cdot$ " se omite completamente y en tal caso la operación del grupo se indica por yuxtaposición, esto es xy. Usualmente, decimos (imprecisamente) que G es un grupo. Si la operación del grupo se denota por $+$, entonces el elemento neutro se denota por 0 y el inverso del elemento x se denota por $-x$.

Si G es un grupo y A y B son subconjuntos de G, entonces $A \cdot B$, o simplemente AB, es el conjunto $\{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

Para $g \in G$ el conjunto $g \cdot A$ o gA se da por $\{gx : x \in A\}$.

A^{-1} es el conjunto $\{x^{-1} : x \in A\}$.

Cuando la operación de G es $+$, entonces $-A = \{-x : x \in A\}$, $g+A = \{g+x : x \in A\}$ y $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

Definición 0.4.2. *Un grupo H es un* subgrupo *del grupo G si $H \subset G$ y la operación del grupo H es la de G restringida a $H \times H$.*

Un subgrupo H de G se llama un subgrupo normal *si $xH = Hx$ para todo $x \in G$.*

Definición 0.4.3. *Si H es un subgrupo de G, entonces los conjuntos de la forma xH para algún $x \in G$ se llaman* clases laterales izquierdas *de H y la familia de estas clases se denota por G/H.*

*Si H es normal y A, B pertenecen a G/H entonces $AB \in G/H$ (*donde, si $A = xH$ y $B = yH$ entonces $AB = xyH$*) y, con respecto a esta operación, G/H es un grupo y se llama el* grupo cociente *o* factor *de G relativo a H.*

Definición 0.4.4. *Dado un subconjunto A no vacío de G, el más pequeño subgrupo de G que contiene a A existe y se llama el* subgrupo generado *por A.*

Definición 0.4.5. *Sean G, H grupos y $f : G \to H$ una función.*

Decimos que f es un homomorfismo *si $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in G$.*

Si $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectiva entonces decimos que G y H son homomorfos.

Si f es además inyectiva, entonces f se llama un isomorfismo *y en este caso decimos que G y H son* isomorfos.

Definición 0.4.6. *Si $f : G \to B$ es un homomorfismo, entonces $f^{-1}(e')$ se llama el* núcleo *de f, donde e' es el elemento neutro de B.*

Teorema 0.4.7. *El núcleo $f^{-1}(e')$ es siempre un subgrupo normal de G.*

Teorema 0.4.8. *Si H es un subgrupo normal de G, entonces la función $\pi : G \to G/H$, dada por $\pi(x) = xH$, es un homomorfismo sobreyectivo y el núcleo de f coincide con*

H.

Tal función se llama la aplicación canónica *o la* proyección canónica *de G sobre G/H, el grupo cociente de G relativo a H.*

Definición 0.4.9. *Un* anillo *es una terna $(R, +, \cdot)$ en la cual $(R, +)$ es un grupo abeliano y " $\cdot$ " es una función*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & R \times R & \to & R \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

tal que

1. *La operación $\cdot$ es asociativa, esto es*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in R.$$

2. *Las leyes distributivas*

$$\begin{array}{rcl} z \cdot (x + y) & = & z \cdot x + z \cdot y \\ (x + y) \cdot z & = & x \cdot z + y \cdot z \end{array}$$

   para $x, y, z \in R$, son ciertas.

Si además,

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in R$$

decimos que $(R, +, \cdot)$ es un anillo abeliano *o* conmutativo.

Usualmente decimos (imprecisamente) que R es un anillo y la operación $\cdot$ de R se denota por yuxtaposición, esto es xy por $x \cdot y$.

El anillo R_0 se llama un *subanillo* del anillo R si $R_0 \subset R$ y las operaciones de anillo en R_0 son las de R restringidas a $R_0 \times R_0$.

Definición 0.4.10. *Si R_1 y R_2 son anillos y $f : R_1 \to R_2$ es una función tal que*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

para todo $x, y \in R_1$, entonces decimos que f es un homomorfismo de anillos.

Tal homomorfismo se llama isomorfismo *si además es biyectivo, y en este caso decimos que R_1 y R_2 son* isomorfos.

Definición 0.4.11. *Un subgrupo aditivo I del anillo R se llama un* ideal izquierdo *si $xI \subset I$ para todo $x \in R$ y se llama un* ideal *si $xI \subset I$ e $Ix \subset I$ para todo $x \in R$.*

Definición 0.4.12. *Sea I un ideal de R. Si en R/I definimos las operaciones $+$ y $\cdot$, por*

$$\begin{aligned}(x+I)+(y+I) &= (x+y)+I\\ (x+I)\cdot(y+I) &= x\cdot y+I\end{aligned}$$

para $x, y \in R$. Entonces $(R/I, +, \cdot)$ es un anillo, llamado el anillo cociente *de R con respecto al ideal I.*

La aplicación canónica $\pi : R \to R/I$ dada por $\pi(x) = x + I$ es un homomorfismo de anillo y es sobreyectiva.

Definición 0.4.13. *Un* Cuerpo *o* Campo *es un anillo $(F, +, \cdot)$ tal que F tiene por lo menos dos elementos y $(F\backslash\{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo.*

0 denota el elemento neutro del grupo $(F, +)$.

La operación $+$ es la operación de adición*, $\cdot$ es la* operación de multiplicación *y el elemento neutro con respecto a la multiplicación es la* unidad*, denotada por 1.*

Cuando no hay confusión, la operación $\cdot$ se indica por yuxtaposición y usualmente decimos (imprecisamente) que F es un cuerpo.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos con respecto a las operaciones usuales $+$ y $\cdot$.

Definición 0.4.14. *Un* espacio vectorial *o* espacio lineal *sobre un campo F es una cuaterna $(X, +, \cdot, F)$ tal que*

1. *$(X, +)$ es un grupo abeliano.*
2. *$\cdot$ es una función*

$$\begin{aligned}\cdot :\ F\times X &\to X\\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x\end{aligned}$$

   que tiene las siguientes propiedades:

   a) $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$.

   b) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$.

   c) $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

   d) $1\cdot x = x$.

   para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in F$.

Los elementos nulos de X y F se denotan por 0.

Los elementos de X se llaman *vectores* y los de F se llaman *escalares*. También decimos que F es el *campo* o *cuerpo de escalares* de X. La operación $+$ se llama la *adición vectorial* y $\cdot$ se llama la *multiplicación escalar*. Cuando no hay confusión sobre el campo

F, decimos que X es un espacio vectorial, y usualmente la operación $\cdot$ se indica por yuxtaposición.

Un *espacio vectorial real* (resp. *complejo*) es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). *En todo el texto los espacios vectoriales considerados son sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$.

Un espacio vectorial $(Y, \oplus, \odot, F)$ es un *subespacio* de un espacio vectorial $(X, +, \cdot, F)$ si $Y \subset X$ y las operaciones $+$ y $\cdot$ coinciden con $\oplus$ y $\odot$ donde éstas se definen.

El conjunto cociente X/Y de X con respecto a un subespacio vectorial Y es un espacio vectorial (cociente) sobre F si definimos la adición vectorial y la multiplicación escalar como sigue:

$$\begin{aligned}(x+Y)+(y+Y) &= x+y+Y \\ \lambda \cdot (x+Y) &= \lambda \cdot x + Y\end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in F$.

Definición 0.4.15. *Si X e Y son espacios vectoriales sobre el campo F, entonces una aplicación $T : X \to Y$ se llama* lineal *si*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in F$.

Definición 0.4.16. *Sea $L(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ lineal}\}$.*

Para $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ y $\alpha \in F$, definimos

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(x) &= T_1(x)+T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) &= \alpha T_1(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Entonces $L(X,Y)$ es un espacio vectorial sobre F.

Los miembros de $L(X,F)$ se llaman funcionales lineales *de X.*

Cuando X es un espacio vectorial cuyo campo escalar $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el espacio vectorial $L(X,\mathbb{K})$ se llama el *dual algebraico* de X y se denota por X^{alg}.

Teorema 0.4.17. *Sean X, Y, Z espacios vectoriales sobre F.*

1. *Si Y es un subespacio vectorial de X, entonces la aplicación canónica $\pi : X \to X/Y$ es lineal y $\pi^{-1}(0) = Y$.*

2. *Si $f : X \to Y$ es lineal, entonces $f^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de X y se llama el* núcleo *de f.*

3. *Si* $f : X \to Y$ *es lineal,* f *es inyectiva si y sólo si* $f^{-1}(0) = \{0\}$.

4. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : X \to Z$ *aplicaciones lineales tales que el núcleo de* g *está contenido en el núcleo de* f*. Entonces la función* $h : Z \to Y$ *dada por* $h(z) = f(g^{-1}(z))$ *está bien definida y es lineal. Además,* $f = h \circ g$*. En efecto, si existe* $h' : Z \to Y$ *lineal tal que* $f = h' \circ g$*, entonces* $h = h'$*.*

5. *Si* $f : X \to Y$ *es lineal,* $Z = X/f^{-1}(0)$ *y* $\pi : X \to Z$ *es la aplicación canónica, entonces existe una función lineal e inyectiva* h *de* Z *en* Y *tal que* $f = h \circ \pi$*.*

Si $f : X \to Y$ es lineal y biyectiva entonces decimos que X e Y son *isomorfos* y que f es un *isomorfismo* de X sobre Y.

Definición 0.4.18. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* F*. Decimos que el subconjunto* A *de* X *es* linealmente independiente *(sobre* F*) si para cada subconjunto finito* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *de elementos distintos en* A *y para cada subconjunto finito* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ *de* F*, se tiene*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i = 0,\, i = 1, \dots, n.$$

Si A *no es linealmente independiente, entonces decimos que* A *es* linealmente dependiente.

Para $\{x_i\}_1^n \subset X$ y $\{\alpha_i\}_1^n \subset F$, el vector

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

se llama una *combinación lineal finita*.

Definición 0.4.19. *Si* B *es un conjunto no vacío linealmente independiente en* X*, tal que todo subconjunto* E *de* X *es linealmente dependiente siempre que* $E \supsetneq B$*,* B *se llama* una base de Hamel *para* X*.*

También decimos base lineal *en vez de base de Hamel.*

Teorema 0.4.20. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* F*. Entonces:*

1. *Si* X *contiene por lo menos dos elementos, entonces* X *tiene una base de Hamel.*

2. *Si* B_1 *y* B_2 *son bases de Hamel para* X*, entonces cada elemento* $x \in X$ *es de la forma*

$$x = \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i$$

con $\{\alpha_i\}_1^n \subset F \setminus \{0\}$ *y* $\{x_i\}_1^n \subset B_i$*.*

Tal representación es además única.

$|B_1| = |B_2|$ se llama la *dimensión* de X.

Teorema 0.4.21. *Si $\emptyset \neq A \subset X$ y X es un espacio vectorial sobre F, el conjunto*

$$Span(A) = \left\{ \sum_{1}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_i \in F, x_i \in A, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un subespacio vectorial de X y es el más pequeño subespacio vectorial que contiene a A.

El espacio $Span(A)$ se llama el subespacio vectorial generado *por A.*

0.5. Espacios Topológicos

El tratamiento dado en el texto, supone por parte del lector una gran familiaridad y destreza en topología general. En esta sección damos una lista de definiciones y teoremas relevantes en espacios topológicos.

Definición 0.5.1. *Un* espacio topológico *es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X tal que*

1. *los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a τ.*
2. *τ es cerrada por las uniones arbitrarias de sus miembros. Esto es, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$.*
3. *τ es cerrada por las intersecciones finitas de sus miembros. Esto es, si $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.*

A la familia τ se le llama una topología *en X.*

Cuando no hay confusión sobre la topología τ, decimos que X es un espacio topológico. A los miembros de τ se les llama *conjuntos τ-abiertos*, o simplemente, *conjuntos abiertos* en X, si no hay confusión sobre la topología de X.

$\tau = \{\emptyset, X\}$ se llama la *topología indiscreta* en X y a (X, τ) se le dice un *espacio topológico indiscreto*. $\tau = \wp(X)$ es llamada la *topología discreta* para X y a (X, τ) se le dice un *espacio topológico discreto*.

Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 para X, decimos que τ_1 es *más débil* que τ_2 o τ_2 es *más fuerte* (o *más fina*) que τ_1 si $\tau_1 \subset \tau_2$. Entonces la colección Σ de todas las topologías para X forman un conjunto parcialmente ordenado (ver 1.5) y la topología indiscreta (resp. discreta) es la menor (resp. la mayor) de la colección Σ.

Definición 0.5.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Un subconjunto* F *de* X *se llama* cerrado *si* $X \setminus F \in \tau$.

Teorema 0.5.3. *La clase de los conjuntos cerrados*

1. *Contiene a* $\emptyset$ *y* X*, esto es* $\emptyset$ *y* X *son cerrados.*

2. *Es cerrada por las uniones finitas, esto es, si* $\{U_i\}_{i=1}^n$ *son cerrados, entonces* $\bigcup_{i=1}^n U_i$ *es cerrado.*

3. *Es cerrada por las intersecciones arbitrarias. Esto es, si* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *son cerrados, entonces* $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ *es cerrado.*

A veces, diremos “un abierto” o “un cerrado” en lugar de “un conjunto abierto” o “un conjunto cerrado”, respectivamente.

Definición 0.5.4. *El* interior $\overset{\circ}{E}$ *(o* $int(E)$*) de un subconjunto* E *de* X *es el más grande conjunto abierto contenido en* E*; y la* clausura $\overline{E}$ *(o* $cl(E)$*) de* E *es el más pequeño conjunto cerrado que contiene a* E.

Definición 0.5.5. *Un* entorno *de un elemento* x *en* X *(resp. de un subconjunto* E *de* X*) es un conjunto* W *tal que* $x \in \overset{\circ}{W}$ *(resp.* $E \subset \overset{\circ}{W}$*) y tal* W *se llama una* vecindad *de* x *(resp. de* E*) si* W *es además abierto.*

Nótese que en este sentido los términos entorno y vecindad son distintos.

Definición 0.5.6. *Sea* $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. *Un elemento* x *en* E *se llama un* punto interior *de* E *si existe un entorno* W *de* x *tal que* $W \subset E$.

Definición 0.5.7. *Un elemento* x *en* X *se llama un* punto de acumulación *de* E *si cada entorno* W *de* x *contiene elementos de* $E \setminus \{x\}$.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de E *se llama el* conjunto derivado *de* E *y se denota por* E' *o* E^d.

Definición 0.5.8. *La familia de todos los entornos de* x *en* X *se llama* el sistema de entornos *de* x.

Si V *es una familia de entornos de* x *en* X *tal que cada entorno* W *de* x *contiene a algún* $v \in V$*, entonces decimos que* v *es una* base para el sistema de entornos *de* x *o una* base local *en* x.

Si F *es una familia de subconjuntos de* X *tal que la colección de las intersecciones finitas de miembros de* F *forma una base local en* x*, entonces* F *se llama una* subbase local *en* x.

Definición 0.5.9. *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se llama una* base para la topología τ *si cada miembro de τ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$.*

Decimos que X es *segundo numerable* o que cumple el *segundo axioma de numerabilidad* si existe una base B a lo sumo numerable para la topología de X.

Definición 0.5.10. *El espacio X se llama* separable *si existe un subconjunto E a lo sumo numerable y denso en X.*

Decimos que X *localmente separable* o que cumple el *primer axioma de numerabilidad* si cada elemento x en X tiene una base local a lo sumo numerable.

Si Γ es una colección de subconjuntos de X tal que la familia $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de miembros de Γ forma una base para la topología de X, entonces Γ se llama una *subbase* para la topología de X.

Definición 0.5.11. *El elemento x es un* punto de la frontera *del subconjunto E de X, si cada entorno W de x corta a E y E^c en el sentido de que $W \cap E \neq \emptyset$ y $W \cap E^c \neq \emptyset$.*

El conjunto de todos los puntos de este tipo se llama la frontera *de E y se denota por ∂E.*

Definición 0.5.12. *Decimos que el espacio X es*

1. *T_1 si cada conjunto unitario $\{x\}$ en X, es cerrado.*
2. Hausdorff *o T_2 si para cualquier par de elementos x e y en X, distintos; existen entornos W de x y V de y tales que $W \cap V = \emptyset$.*
3. Regular *si cada elemento en X tiene una base local de entornos cerrados en X.*
4. Normal *si para cualquier par de conjuntos cerrados y disjuntos A y B en X existen abiertos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 0.5.13. *Una familia C de conjuntos abiertos en X se llama un* recubrimiento abierto *ó* cubrimiento abierto *del subconjunto E de X si $E \subset \bigcup_{U \in C} U$.*

Una subfamilia Γ del cubrimiento C se llama un subcubrimiento *de C para E si $E \subset \bigcup_{U \in \Gamma} U$.*

Definición 0.5.14. *Un subconjunto E de X se llama* compacto *si cada cubrimiento abierto para E tiene una subcubrimiento finito.*

Decimos que una clase F de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* si cada subclase finita de F tiene una intersección no vacía.

Definición 0.5.15. *El espacio X es* localmente compacto *si cada elemento x en X tiene una vecindad U tal que $\overline{U}$ es compacto.*

Definición 0.5.16. *Un conjunto E en un espacio topológico X es un G_δ (resp. un F_σ) si $E = \bigcap_1^n U_n$ (resp. $E = \bigcup_1^n U_n$), donde los U_n son abiertos (resp. los F_n son cerrados) en X.*

El conjunto E se llama *$\sigma-$compacto* si E es una unión numerable de compactos.

Definición 0.5.17. *Sean (X, τ) y (Y, τ') espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función.*

Decimos que f es continua *en x si dado un entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Si f es continua en todo x en X, entonces f se dice continua *en X.*

Es claro que f es continua si y sólo si $f^{-1}(U) \in \tau$ para todo $U \in \tau'$.

Decimos que f es *abierta* (resp. *cerrada*) si $f(U)$ es abierto (resp. $f(F)$ es cerrado) en Y para cada $U \in \tau$ (resp. para cada F cerrado en X).

Definición 0.5.18. *Si f es biyectiva y bicontinua (esto es, f y f^{-1} son continuas) entonces f se llama un* homeomorfismo *y en tal caso X e Y se dicen* homeomorfos *(o* homeomórficos*).*

Si $X = Y$ y τ y τ' son topologías homeomórficas, decimos que τ y τ' son equivalentes.

Si $B_1(x)$ y $B_2(x)$ son bases locales en x con respecto a las topologías τ_1 y τ_2 para X, entonces $B_1(x)$ y $B_2(x)$ se llaman *equivalentes* si para cada U_1 en $B_1(x)$ existen U_2 en $B_2(x)$ tal que $U_2 \subset U_1$ y para cada V_2 en $B_2(x)$ existe V_1 en $B_1(x)$ tal que $V_1 \subset V_2$.

Definición 0.5.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. la* topología relativa *τ' de Y es la familia de todas las intersecciones de miembros de τ con Y, es decir,*

$$\tau' = \{U \cap Y \; : \; U \in \tau\}.$$

Es claro que (Y, τ') es un espacio topológico e (Y, τ') se llama un subespacio *del espacio (X, τ).*

Cada miembro U de τ' se dice abierto en Y, y el complemento de U con respecto a Y, $Y \backslash U$, es cerrado *en Y.*

Si E es un subconjunto de Y, entonces la $\tau'-$clausura de E se llama la clausura de E en Y.

Definición 0.5.20. *Decimos que el espacio topológico X es* conexo *si X no puede expresarse como una unión disjunta de dos conjuntos abiertos y no vacíos.*

Un subconjunto Y de X se llama conexo *en X si (Y, τ') es conexo, donde τ' es la topología relativa para Y.*

Una componente conexa *C del espacio X es un subconjunto maximal conexo en el sentido de que si $C \subset E$ y E es conexo en X, entonces $E = C$.*

Decimos que X es totalmente disconexo *si cada elemento x en X tiene una base local de entornos que son a la vez abiertos y cerrados en X.*

Un subconjunto E de X se llama *abierto-cerrado* si E es a la vez abierto y cerrado en X.

Definición 0.5.21. *El espacio topológico X es* extremadamente disconexo *si la clausura de cada abierto en X es abierto-cerrado en X.*

La noción de convergencia en espacios topológicos es muy importante.

Sea X un espacio topológico. Sea $(D, \geq)$ un conjunto dirigido. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ una red en X (ver la definición 1.4.13 para la definición de conjuntos dirigidos y redes). Decimos que la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in (D, \geq)}$ está

1. *Eventualmente* en A si existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in A$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

2. *Frecuentemente* en A si para cada $\alpha \in D$ existe $\alpha' \in D$ tal que $\alpha' \geq \alpha$ y $x_{\alpha'} \in A$.

Un subconjunto E del conjunto dirigido $(D, \geq)$ se llama *cofinal* en D si para cada $\alpha \in D$ existe un $\beta \in E$ tal que $\beta \geq \alpha$.

Definición 0.5.22. *Decimos que la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in (D, \geq)}$ es* convergente *a x en X si $\{x_\alpha\}$ está eventualmente en cada entorno de x. En tal caso, escribimos $x_\alpha \to x$ y decimos que x es un* límite *de $\{x_\alpha\}$.*

Si $(D, \geq)$ y $(E, >)$ son conjuntos dirigidos, entonces el producto cartesiano $D \times E$ está dirigido por la relación $\gg$ dada por $(d, e) \gg (d', e')$ si $d \gg d'$ y $e > e'$. El conjunto dirigido $(D \times E, \gg)$ se llama el *conjunto producto dirigido*.

Una red $\{y_\beta : \beta \in E\}$ es una *subred* de $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ si existe una función $f : E \to D$ tal que

1. $y_\beta = x_{f(\beta)}$.

2. Para cada α en D existe β en E con la propiedad de que si $\beta' \geq \beta$ entonces $f(\beta') \geq \alpha$.

Definición 0.5.23. *Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una red dirigida por $\mathbb{N}$.*

Una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subred de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ya que podemos tomar $E = \{n_k\}_1^\infty$ un subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$ y $f : E \to \mathbb{N}$ dada por $f(n_k) = n_k$.

Nótese que una subred de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es necesariamente una subsucesión.

El elemento x en X se llama un *punto de aglomeración* de la red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in(D,\geq)}$ si la red está frecuentemente en cada entorno de X.

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos.

El *producto cartesiano* de los $X_{i's}$ es el conjunto

$$X = \prod_{i\in I} X_i$$

de todas las funciones x definidas en I con valores $x(i) = x_i \in X_i$ para cada $i \in I$.

Cuando ningún X_i es vacío y $I \neq \emptyset$, por el axioma de elección en 1.5.6, $X \neq \emptyset$.

Definición 0.5.24. *Para $i \in I$, i fijo, sea U_{i_0} un abierto en X_{i_0} y para $i \neq i_0$ sea $U_i = X_i$. Sea F la colección de todos los conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} U_i$ y sea $\mathcal{B}$ la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de F. Entonces la topología (única) τ para la cual $\mathcal{B}$ es una base se llama la* topología producto *para X.*

Los espacios X_i se llaman *espacios de coordenadas*.

La aplicación $P_i : X \to X_i$ dada por $P_i(x) = x_i$ se llama la $i-$*ésima proyección* de X.

Definición 0.5.25. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Sea $\widetilde{X} = X/\sim$ la familia de todas las clases de equivalencia. Sea $\widetilde{\tau}$ la familia*

$$\widetilde{\tau} = \left\{U \subset \widetilde{X} : \pi^{-1}(u) \in \tau\right\}$$

donde $\pi : X \to \widetilde{X}$ es la aplicación canónica dada por $\pi(x) = \widetilde{x}$, siendo $\widetilde{x}$ la clase de equivalencia a la cual pertenece x. Entonces τ es una topología para $\widetilde{X}$ y se llama la topología cociente *de X.*

Definición 0.5.26. *Sea X un conjunto arbitrario. Supóngase que $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ es una función tal que*

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

para todo x, y, z en X.

Entonces decimos que d es una pseudo-métrica *en X y (X, d) es un* espacio pseudo métrico.

Si además la pseudo-métrica cumple la propiedad:

$$d(x, y) = 0 \text{ implica que } x = y,$$

entonces d se llama una métrica *en X y (X, d) es un* espacio métrico.

Definición 0.5.27. *Si d es una pseudo-métrica en X, una* bola abierta con centro x_0 en X y radio $r > 0$ (r finito) *es el conjunto*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definición 0.5.28. *Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las bolas abiertas de la forma $B_r(x_0)$, $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $x_0 \in X$, x_0 arbitrario. La topología τ_d para la cual $\mathcal{B}$ es una base se llama la* topología peudo-métrica *(resp. la* topología métrica*) para X con respecto a la pseudo-métrica (resp. a la métrica) d y (X, d) denota* al espacio (topológico) pseudo-métrico *(resp. al* espacio (topológico) métrico*) con la topología τ_d.*

Definición 0.5.29. *Un espacio (X, τ) se llama* metrizable *si existe una métrica d en X tal que la topología τ coincide con la topología métrica τ_d inducida por d en X. De manera similar definimos un* espacio pseudo-metrizable.

Definición 0.5.30. *Sea (X, d) un espacio pseudo-métrico. Un subconjunto E de X se llama*

1. Acotado *si existe $M \in R^+$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo x, y en E.*

2. Totalmente acotado *o* precompacto*, si tiene la propiedad de que dado $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $F \subset E$ tal que*

$$E \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x).$$

Definición 0.5.31. *Sea (X, d) un espacio métrico.*

1. *Una sucesión $(x_n)_1^\infty$ en X es de* Cauchy *si $d(x_n, x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.*

2. *Una sucesión $(x_n)_1^\infty$ en X es* convergente *a x en X si $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

3. *Un subconjunto E de X se llama* completo *si cada sucesión $(x_n)_1^\infty$ de Cauchy en E, converge a un elemento x en E.*

   Si X es completo*, decimos que X es un* espacio métrico completo.

Definición 0.5.32. *Si (X, d) e (Y, d') son espacios pseudo-métricos y $T : X \to Y$ es una función, entonces decimos que T es una* isometría *si $d'(T(x), T(y)) = d(x, y)$ para* *todo* $x, y \in X$ *y que* X *e* Y *son* isométricos *si existe una isometría* T *de* X *sobre* Y.

Definición 0.5.33. *Si* f *es una función de* (X, d) *en* (Y, d') *tal que dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *con la propiedad*

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \textit{ siempre que } d(x, y) < \delta$$

entonces f *se dice* uniformemente continua.

Definición 0.5.34. *Si* $f_\alpha : (X, \tau) \to (Y, d')$ *son funciones, para* $\alpha \in I$ *y* $x \in X$*; entonces decimos que* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es* equicontinua *en* x *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* U *de* x *tal que*

$$d'(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) < \varepsilon$$

para todo $\alpha \in I$ *y para todo* $y \in U$.

La familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *se llama* equicontinua *en* X*, si la familia* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es equicontinua en cada elemento* x *de* X.

Definición 0.5.35. *Un subconjunto* E *del espacio topológico* X *se llama* nunca denso *en* X *si int* $\overline{E} = \emptyset$.

Decimos que E *es de* primera categoría *en* X *si* E *es una unión numerable de conjuntos nunca densos en* X.

Se dice que E *es de* segunda categoría *en* X *si* E *no es de primera categoría en* X.

Sea $\leq$ el orden natural en $\mathbb{R}$. Se sabe que dados x, y en $\mathbb{R}$, sólo una de las relaciones

$$x < y \quad \text{ó} \quad y < x \quad \text{ó} \quad x = y$$

es cierta.

Para a, b en $\mathbb{R}$ con $a < b$ sean

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Decimos que (a, b) es un *intervalo abierto*, $[a, b]$ un *intervalo cerrado* y $[a, b)$ y $(a, b]$ son intervalos *semi-abiertos* o *semi-cerrados* en $\mathbb{R}$.

Para $a \in \mathbb{R}$, los intervalos

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,

son *intervalos abiertos no acotados* en $\mathbb{R}$; y

- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

son *intervalos cerrados y no acotados* en $\mathbb{R}$.

La topología dada por la familia de todas las uniones arbitrarias de interva1os abiertos en $\mathbb{R}$ se llama *la topología usual de* $\mathbb{R}$ y también se da por la métrica $d(x, y) = |x - y|$, donde $|t|$ es el valor absoluto de cualquier número real t.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico completo, separable y segundo numerable.

El espacio $\mathbb{R}^n = \prod_1^n \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales

1. $(x_i)_1^n + (y_i)_1^n = (x_i + y_i)_1^n$
2. $\alpha\,(x_i)_1^n = (\alpha\, x_i)_1^n$

para $(x_i)_1^n, (y_i)_1^n \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$; y se llama *el espacio euclidiano* de dimensión n.

La topología de $\mathbb{R}^n$ es la topología producto, la cual se da por la métrica

$$d\left((x_i)_1^n, (y_i)_1^n\right) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

La topología del plano complejo $\mathbb{C}$ se da por la métrica

$$d(z_1, z_2) = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_1)^2\right)^{1/2},$$

donde $z_j = x_j + iy_j$, con $x_j,\, y_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2$.

El espacio $\mathbb{C}^n = \prod_1^n \mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con respecto a las operaciones de adición y multiplicación escalar similares a las de $\mathbb{R}^n$, salvo que aquí consideramos $\alpha\,(z_i)_1^n$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. El espacio $\mathbb{C}^n$ se llama el *espacio unitario* de dimensión n.

La topología de $\mathbb{C}^n$ es la topología producto y se da por la métrica

$$d\left((z_i)_1^n,\, (w_i)_1^n\right) = \left(\sum_1^n |z_i - w_i|^2\right)^{1/2},$$

donde $|z|$ es el valor absoluto del número complejo z.

Se sabe que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios métricos completos, separables y segundo numerables.

Definición 0.5.36. *Un espacio topológico X se llama* completamente regular *si, dados x en X y F cerrado en X con $x \notin F$, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo y en F.*

Si X es T_1 y completamente regular, entonces X se llama un espacio de Tychonoff.

En lo que sigue se resumen los teoremas principales de los espacios topológicos que son relevantes para el desarrollo del texto (inclusive para los problemas resueltos y los ejercicios).

Teorema 0.5.37 (**Propiedades del interior de un conjunto**).
Sea X un espacio topológico y sean A, B subconjuntos de X. Entonces:

1. *A es abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$.*
2. *$\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{X} = X$.*
3. *$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.*
4. *$\overline{A^c} = X \setminus \overset{\circ}{A}$.*
5. *$\overset{\circ}{A}$ es la unión de los puntos interiores de A.*
6. *$\overset{\circ}{A} = \bigcup\{W : W \subset A, W$ es abierto $\} = \bigcup\{W : W \subset A, W$ entorno de algún $x \in A\}$.*
7. *$int(int(A)) = int(A)$.*
8. *$\overline{A} = X \setminus int(A^c)$.*

Teorema 0.5.38 (**Propiedades de la clausura de un conjunto**).
Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subset X$.

Entonces:

1. a) *$\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.*

   b) *$A \subset \overline{A}$.*

   c) *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, donde $\overline{\overline{A}}$ es la clausura de $\overline{A}$.*

   d) *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

   e) *$\overline{A} = A \cup A'$.*

   f) *$\overline{A} = \bigcap\{F : A \subset F, F$ cerrado en $X\}$.*

   g) *$x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A convergente a x.*

   h) *A es cerrado si y sólo si ninguna red en A converge a un elemento en A^c.*

   i) *$x \in A'$ si y sólo sí existe una red en $A \setminus \{x\}$ que converge a x.*

j) *Si x es un punto de aglomeración de una red, entonces existe una subred de la red que converge a x.*

2. *Supóngase que X cumple el primer axioma de numerabilidad. Entonces:*

   a) *$x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x.*

   b) *A es cerrado en X si y sólo si ninguna sucesión en A converge a un elemento en A^c.*

   c) *$x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión en $A \setminus \{x\}$ que converge a x.*

   d) *Si x es un punto de aglomeración de una sucesión entonces existe una subsucesión de la sucesión que converge a x.*

   e) *Si X es pseudo-metrizable, entonces X cumple el primer axioma de numerabilidad y en consecuencia, los items anteriores de este numeral son ciertos para un subconjunto A de X.*

3. *Un operador de clausura en X es un operador $\mathcal{C}$ que asigna a cada subconjunto E de X un subconjunto $\mathcal{C}(E)$ de X tal que los items a)-d) del numeral 1, se cumplen para $\mathcal{C}(\ )$ en lugar de $cl(\ )$.*

   Si $\mathcal{C}$ es un operador de clausura en X y Γ es la familia de todos los subconjuntos E de X con $\mathcal{C}(E) = E$, entonces la familia $\tau = \{E^c : E \in \Gamma\}$ es una topología para X y $\mathcal{C}(A)$ es la τ-clausura de A para cada subconjunto A de X.

Teorema 0.5.39 (Propiedades de la frontera de un conjunto).
Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Entonces:

1. *$x \in \partial A$ si y sólo si $x \notin int(A)$ y $x \notin int(A^c)$.*

2. *$\partial A = \overline{A} \bigcap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.*

3. *∂A es cerrado en X.*

4. *$X \setminus \partial A = int(A) \bigcup int(A^c)$.*

5. *$\overline{A} = A \bigcup \partial A$ y $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.*

6. *A es cerrado si y sólo si $\partial A \subset A$ y A es abierto si y sólo si $A \bigcap \partial A = \emptyset$.*

7. *A es abierto, entonces ∂A es nunca denso en X.*

Teorema 0.5.40 (Sobre Entornos).

1. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}(x)$ una base local en x para cada x en X. Entonces:*

a) *Si* $\{U_n\}_1^n$ *son entornos (respectivamente, vecindades) de* x*, entonces así lo es* $\bigcap_1^n U_i$.

b) *Dados* $U \in \mathcal{B}(x)$, $y \in \overset{\circ}{U}$, *existe* $V \in \mathcal{B}(y)$ *tal que* $V \subset U$.

c) *Si* $U \in \mathcal{B}(x)$, *existe* $U_0 \in \mathcal{B}(x)$ *tal que para* $y \in U_0$ *existe* $V \in \mathcal{B}(y)$ *con* $V \subset U$.

d) *X es de Hausdorff si y sólo si dados* x, y *en* X, $x \neq y$*; existen* $U \in \mathcal{B}(x)$ *y* $V \in \mathcal{B}(y)$ *tales que* $U \bigcap V = \emptyset$.

e) *X es de Hausdorff si y sólo si cada red convergente en X tiene límite único.*

f) *Un espacio métrico es de Hausdorff.*

2. *Sea* X *un conjunto. Para cada* x *en* X *sea* $\mathcal{B}(x)$ *una familia no vacía de subconjuntos de* X *tal que:*

   a) $x \in U$ *para cada* $U \in \mathcal{B}(x)$.

   b) *Dados* $U, V \in \mathcal{B}(x)$, *existe* $W \in \mathcal{B}(x)$ *tal que* $W \subset U \bigcap V$*; y*

   c) *Dado* $U \in \mathcal{B}(x)$, *existe* $U_0 \in \mathcal{B}(x)$ *tal que para cada* $y \in U_0$ *existe* $V \in \mathcal{B}(y)$ *con* $V \subset U$.

   Entonces existe una topología τ *única para* X *tal que* $\mathcal{B}(x)$ *es una base local en* x *para cada* x *en* X *con respecto a* τ.

   Si la familia $\mathcal{B}(x)$ *además cumple la condición dada en 1.-d) entonces* τ *es de Hausdorff.*

Teorema 0.5.41 (Sobre Bases y Sub-Bases).

1. *Sea* X *un espacio topológico. Entonces:*

   a) *Si* X *tiene una base numerable para su topología entonces* X *es separable.*

   b) *Si* X *es un espacio compacto de Hausdorff y tiene una base numerable para su topología entonces* X *es metrizable.*

   c) *Si* X *es un espacio métrico totalmente acotado, entonces* X *es separable y así, tiene una base numerable para su topología.*

   d) *Si* X *es pseudo-metrizable, entonces* X *tiene una base numerable si y sólo si* X *es separable.*

   e) *Los espacios* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$ *son separables y tienen bases numerables para sus topologías.*

2. *Sea X un conjunto. Sea Γ una familia no vacía de subconjuntos de X y sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de miembros de Γ. Si $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, entonces la familia τ de todas las uniones arbitrarias de miembros de $\mathcal{B}$ es una topología para X y Γ (resp. $\mathcal{B}$) es una sub-base (resp. es una base) para τ.*

   La topología τ es la menor topología que contiene a Γ. Decimos que la familia Γ genera a la topología τ.

Teorema 0.5.42 (Sobre Topología Relativa).
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea (Y, τ') un subespacio de X. Sea A un subconjunto de Y. Entonces:

1. *A es τ'-cerrado si y sólo si existe algún F, τ-cerrado tal que $A = F \cap Y$.*

2. *Un elemento x de Y es un punto de τ'-acumulación de A si y sólo si es un punto de τ-acumulación de A.*

3. *La τ'-clausura de A es la intersección de Y con la τ-clausura de A.*

4. *Si Y es τ-cerrado, entonces cada $F \subset Y$, τ'-cerrado; es τ-cerrado.*

5. *Si Y es τ-abierto, entonces cada $U \subset Y$, τ'-abierto; es τ-abierto.*

6. *Si A es τ'-compacto, entonces A es τ-compacto y si $B \subset Y$ y B es τ-compacto, entonces B es τ'-compacto.*

7. *Las propiedades T_1, de Hausdorff, regular, localmente separable, metrizable y segundo numerable son hereditarias.*

8. *Si X es metrizable y separable, entonces así lo es Y.*

Teorema 0.5.43 (Sobre Funciones Continuas).

1. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.*

   Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) *f es continua.*

   b) *$f^{-1}(F)$ es cerrado para cada F τ'-cerrado.*

   c) *$f^{-1}(U)$ es abierto para cada U en una sub-base de τ'.*

   d) *Para cada x en X, $f^{-1}(U)$ es un entorno de x para cada entorno U de $f(x)$.*

   e) *Para cada x en X y para cada entorno U de $f(x)$ existe un entorno V de x tal que $f(V) \subset U$.*

   f) *Para cada red $\{x_\alpha\}$ en X convergente a x en X, $\{f(x_\alpha)\}$ converge a $f(x)$, donde x es arbitrario en X.*

g) *Si X es localmente separable, entonces en f) podemos reemplazar las redes por sucesiones.*

2. *Sea (X,τ) compacto en 1. Entonces $f(X)$ es compacto siempre que f sea continua.*

   Además, si f es biyectiva y continua e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

3. *Sea X compacto y metrizable con la métrica d. Sean (Y,d') un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función.*

   a) *Si f es continua, entonces f es uniformemente continua.*

   b) *Si $Y = \mathbb{R}$ y f es continua, entonces existen x, y en X tales que*

   $$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$$

   para todo $x \in X$ y decimos que f alcanza su máximo y mínimo en X.

   Si además $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Teorema 0.5.44 (Sobre Compacidad).
Sea X un espacio topológico.

1. *Si X es de Hausdorff, entonces cada subconjunto compacto es cerrado en X.*

2. *Si X es compacto y de Hausdorff (respectivamente, y regular) entonces X es normal.*

3. *Si $\{A_i\}_1^n$ son compactos en X, entonces $\bigcup_1^n A_i$ es compacto en X.*

4. *Sea A un subconjunto compacto en X. Si B es cerrado en X y $B \subset A$, entonces B es compacto.*

5. *Si X es de Hausdorff y $\{A_i\}$ es una familia de conjuntos compactos en X entonces $\bigcap A_i$ es compacto.*

6. *Sea A un subconjunto de X. Entonces las siguientes son equivalentes:*

   a) *A es compacto.*

   b) *Cada red en A tiene una sub-red convergente con límite en A.*

   c) *Si Γ es una familia de subconjuntos cerrados en el subespacio A, con la propiedad de intersección finita, entonces $\bigcap_{F\in\Gamma} F \neq \emptyset$.*

7. *Sea (X,d) un espacio pseudo-métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *X es compacto.*

   b) *X es totalmente acotado y completo.*

   c) *Para cada sucesión en X existe una subsucesión convergente a un elemento en X.*

   d) *Cada sucesión en X tiene un punto de aglomeración.*

   e) *Para cada subconjunto infinito E de X existe un elemento x tal que cada entorno de x contiene un número infinito de elementos de E.*

8. **Teorema de Tychonoff.** *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios a topológicos. Entonces $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ es compacto si y sólo si cada X_α es compacto.*

9. *Si $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia finita de espacios localmente compactos y de Hausdorff, entonces $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto y de Hausdorff.*

10. **Teorema de Heine-Borel.** *Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si E es acotado y cerrado.*

11. *Un resultado similar al item anterior es cierto para $\mathbb{C}^n$.*

Teorema 0.5.45 (Sobre Espacios Metricos).
Sea (X,d) un espacio pseudo-métrico. Sea A un subconjunto de X y sea

$$d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,y) : y \in A\}.$$

Entonces:

1. *Si $f(x) = d(x,A)$, entonces $f : X \to [0,\infty)$ es continua.*

2. *$\overline{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$.*

3. *X es normal.*

4. *Sea*

   $$d'(x,y) = \text{mín}\,\{1, d(x,y)\}\,,\ x,y \in X.$$

   Entonces (X,d') es un espacio pseudo-métrico cuya topología coincide con la de (X,d).

   En consecuencia, cada espacio pseudo-métrico es homeomorfo a un espacio pseudo-métrico de diámetro a lo sumo uno; donde el diámetro de A se define por

   $$diam(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}\,.$$

5. *Si* (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$; *son espacios pseudo-métricos, entonces* $\prod_1^\infty X_n$ *es pseudo-metrizable con la pseudo-métrica* d *dada por*

$$d\left((x_n)_1^\infty, (y_n)_1^\infty\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n, y_n)}{1 + d(x_n, y_n)}.$$

   d *es una métrica si cada* d_n *es una métrica.*

6. *Si* (X, d) *es completo, entonces cada subespacio cerrado es completo.*

   Si (X, d) *es un espacio métrico, entonces cada subespacio completo es cerrado.*

7. *Si* (X, d) *es completo, entonces cada red de Cauchy en* X *es convergente a un elemento en* X. ($(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ es una *red de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\alpha \in D$ tal que $d(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$ para todo $\alpha, \beta \geq \alpha_0$).

8. *Si* (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$; *son espacios pseudo-métricos, entonces* $\prod_1^\infty X_n$ *es completo si y sólo si cada* (X_n, d_n) *es completo.*

   Si $X = \prod_1^\infty X_n$, *entonces una red en* X *es de Cauchy si y sólo si su proyección en cada espacio de coordenadas es de Cauchy.*

9. *Sea* $f : A \to Y$ *una función uniformemente continua, donde* $A \subset X$ *y* X, Y *son espacios métricos. Si* Y *es además completo, entonces existe una extensión única* $\overline{f}$ *de* f *a* $\overline{A}$, *la clausura de* A; *tal que* $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ *es continua. Además,* $\overline{f}$ *es uniformemente continua.*

10. *Cada espacio métrico (o pseudo-métrico) es isométricamente isomorfo con un subconjunto denso de un espacio métrico (respectivamente, pseudo-métrico) completo.*

11. *El* completamiento *de un espacio métrico* (X, d) *es un par* $(f, (X^*, d^*))$, *donde* (X^*, d^*) *es un espacio métrico completo y* f *es un isomorfismo isométrico de* X *sobre un subconjunto denso de* X^*.

    Cada espacio métrico tiene su completamiento que es único salvo un isomorfismo isométrico.

12. **Teorema de Cantor.** (X, d) *es completo si y sólo si para cada sucesión* $(C_n)_1^\infty$ *de conjuntos cerrados no vacíos en* X *tal que* $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ *y* $diam(C_n) \to 0$, *se tiene que* $\bigcap_1^\infty C_n \neq \emptyset$.

13. **Teorema de Baire.** *Sea* X *un espacio pseudo-métrico y completo o un espacio localmente compacto y regular. Entonces* X *es de segunda categoría en si mismo*

y la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos y densos en X es densa en Y.

Teorema 0.5.46 (**Sobre la Topología Producto**).
Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ el espacio producto. Entonces:

1. *Si cada X_α es T_1 (respectivamente, de Hausdorff), entonces X también lo es.*
2. *Si $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es la α-ésima proyección, entonces P_α es continua y abierta.*
3. *La topología producto es la topología más débil para X tal que cada P_α sea continua.*
4. *Una red en X es convergente a x en X si y sólo si su α-ésima proyección en X_α converge a $P_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in I$.*
5. *Si Y es un espacio topológico y $f : Y \to X$ es una función, entonces f es continua si y sólo si P_α o f es continua para todo α.*
6. *Si cada X_α es regular (respectivamente, completamente regular) entonces también lo es X.*

Teorema 0.5.47 (**Sobre la Topología Cociente**).
Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Sea

$$\pi : X \to X/\sim$$

la aplicación canónica y supóngase que en $X/\sim$ se da la topología cociente. Entonces:

1. *π es continua, y la topología cociente es la topología más fuerte para $X/\sim$ tal que π sea continua.*
2. *Si $X/\sim$ es de Hausdorff, entonces $\sim$ es cerrado en $X \times X$.*
3. *Si π es abierta y $\sim$ es cerrado en $X \times X$, entonces $X/\sim$ es de Hausdorff.*
4. *Si Y es un espacio topológico y $f : X/\sim \to Y$ es una función, entonces f es continua si y sólo si $f \circ \pi : X \to Y$ es continua.*

Teorema 0.5.48 (**Sobre Espacios Conexos**).
Sea X un espacio topológico. Entonces:

1. *Si A es un subconjunto conexo de X, entonces $\overline{A}$ es conexo.*
2. *Sea Γ una familia de subconjuntos conexos de X. Si para cualquier par $A, B \in \Gamma$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{A \in \Gamma} A$ es conexo.*

3. *Cada subconjunto conexo de X está contenido en alguna componente, ó cada componente es cerrada.*

   Si A y B son componentes distintas en X, entonces $A \cap B = \emptyset$.

4. *Si X es de Hausdorff, entonces X es totalmente disconexo si y sólo si cada componente es un conjunto unitario.*

5. *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios conexos, entonces también lo es $\prod_\alpha X_\alpha$.*

6. *Si $f : X \to Y$ es continua, donde X e Y son espacios topológicos y si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

7. *Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces E es conexo si y sólo si E es un intervalo en $\mathbb{R}$.*

8. *Si $F : X \to \mathbb{R}$ es continua, donde X es un espacio conexo, entonces para x, y en X, f asume todos los valores entre $f(x)$ y $f(y)$.*

Teorema 0.5.49 (**Sobre Espacios Normales**).

1. **Lema de Urysohn.** *Si X es un espacio normal y A, B son subconjuntos disjuntos y cerrados de X, entonces existe una función $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ para todo x en A y $f(y) = 1$ para todo y en B.*

2. *Si X es normal e Y es un subespacio de X, en general, Y no es normal.*

3. *El producto de dos espacios normales, en general, no es normal. Lo mismo sucede para los espacios cocientes.*

Teorema 0.5.50 (**Sobre Redes**).

1. *Sea X un espacio topológico. Sea $\{s_\alpha\}_\alpha$ una red en X. Entonces:*

   a) *Si $s_\alpha = s$ para cada α, entonces $\{s_\alpha\}_\alpha$ converge a s.*

   b) *Si $\{s_\alpha\}_\alpha$ converge a s, entonces cada subred de $\{s_\alpha\}_\alpha$ es convergente a s.*

   c) *Si $\{s_\alpha\}_\alpha$ no converge a s, entonces existe una subred $\{s_\beta\}_\beta$ de $\{s_\alpha\}_\alpha$ tal que ninguna subred de $\{s_\beta\}_\beta$ converge a s.*

   d) **Teorema de límites iterados.** *Sea D un conjunto dirigido. Sea E_α un conjunto dirigido para cada α en D y sea $F = D \times \prod_{\alpha \in D} E_\alpha$ dirigido por la relación $(\alpha, f) \geq (\alpha', f')$ si $\alpha \geq \alpha'$ y $f(\beta) \geq f'(\beta)$ para todo β en D. Para (α, f) en F sea $h(\alpha, f) = (\alpha, f(\alpha)) \in D \times E_\alpha$. Si $S(\alpha, \beta) \in X$ para cada $\alpha \in D$ y para cada $\beta \in E_\alpha$, entonces $S \circ h$ converge a $\lim_\alpha \lim_\beta S(\alpha, \beta)$ siempre que el límite iterado exista.*

2. *Sea X un conjunto. Sea $\mathcal{C}$ la clase de todos los pares (S, s), donde S es una red en X y s es un elemento en X. Decimos que S converge a $s(\mathcal{C})$ ó $\lim S \equiv s$ si $(S, s) \in \mathcal{C}$.*

   Sea $\mathcal{C}$ una clase de convergencia *en el sentido de que cada (S, s) en $\mathcal{C}$ cumple las propiedades a)-d) de 1 con respecto a la convergencia $(\mathcal{C})$. Para cada subconjunto A de X sea*

$$A^c = \{s: \text{ existe alguna red } S \text{ en } A \text{ que converge } (\mathcal{C}) \text{ a } s\}.$$

   Entonces c es un operador de clausura y $(S, s) \in \mathcal{C}$ si y sólo si S converge a s con respecto a la topología asociada con c (ver 0.5.38.c).

   Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Escribimos

$$f(x) \to y \text{ cuando } x \to x_0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = y$$

   si existe un elemento y en Y tal que para cada entorno V de y en Y tenemos una vecindad U de x en X con $f(x) \in V$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$.

   Si X e Y son espacios métricos, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ si y sólo si $\lim f(x_n) = y$ para cada sucesión $\{x_n\}_1^\infty$ en X tal que $x_n \neq x_0$ para todo n y $\lim_n x_n = x_0$. En este caso, si el límite existe, es único.

0.6. Análisis en $\mathbb{R}$

En esta parte damos algunas conceptos y resultados en $\mathbb{R}$ que no se incluyeron en la sección anterior.

Teorema 0.6.1. *Un conjunto no vacío U es abierto en $\mathbb{R}$ si y sólo si U es una unión numerable de intervalos abiertos y mutuamente disjuntos, donde el conjunto vacío también se trata como intervalo abierto. Estos intervalos abiertos no vacíos ($\neq \emptyset$) se llaman los* intervalos componentes *de U.*

Definición 0.6.2. *Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Decimos que E es* acotado superiormente *(resp.* inferiormente*) en $\mathbb{R}$ si existe un número real t tal que $x \leq t$ (resp. $t \leq x$) para todo x en E; tal t se llama una* cota superior *(resp. una* cota inferior*) de E.*

Un número real t se llama el supremo *(resp.* ínfimo*) de E si t_0 es una cota superior (resp. una cota inferior) de E tal que ningún $t < t_0$ (resp. ningún $t > t_0$) es una cota superior (resp. una cota inferior) de E.*

El supremo de E se denota por $\sup E$ *o*

$$\sup\{x : x \in E\}$$

y el ínfimo de E se denota por $\text{ínf } E$ *o*

$$\text{ínf}\{x : x \in E\}.$$

Decimos que E es acotado *en $\mathbb{R}$ si E es a la vez acotado superior e inferiormente.*

Nótese que E es acotado en este sentido si y sólo si E es acotado en el sentido dado en la sección anterior para los espacios métricos.

Definición 0.6.3. *Sea $\{x_n\}_1^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}$.*

Decimos que $\{x_n\}_1^\infty$ es no decreciente *y escribimos $x_n \uparrow$ (resp. es* no creciente *y escribimos $x_n \downarrow$) si*

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ (resp. si } x_{n+1} \leq x_n\text{)}$$

para todo n en $\mathbb{N}$.

Decimos que $\{x_n\}_1^\infty$ es estrictamente no decreciente *si*

$$x_n < x_{n+1}$$

para todo n. De manera similar definimos sucesiones estrictamente no creciente*.*

La sucesión $\{x_n\}_1^\infty$ se llama monótona *(resp.* estrictamente monótona*) si es no decreciente o no creciente (resp. si es estrictamente no decreciente o no creciente).*

Teorema 0.6.4. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces:*

1. *Si E es acotado superiormente (resp. inferiormente) entonces* $\sup E$ *(resp.* $\text{ínf } E$*) existe en $\mathbb{R}$.*

2. *Si $s = \sup E$ existe en $\mathbb{R}$, entonces $\text{ínf}(-E)$ existe en $\mathbb{R}$ y $s = -\text{ínf}(-E)$, donde $-E = \{-x : x \in E\}$.*

3. *Si E es cerrado y acotado superiormente (resp. inferiormente), entonces* $\sup E$ *(resp.* $\text{ínf } E$*) pertenece a E.*

4. *Una sucesión monótona $\{x_n\}_1^\infty$ en $\mathbb{R}$, converge a un límite x en $\mathbb{R}$ si y sólo si es acotada.*

   Entonces $x = \sup\limits_n x_n$ si $x_n \uparrow$ y $x = \text{ínf}\limits_n x_n$ si $x_n \downarrow$. En tal caso, escribimos $x_n \uparrow x$ ó $x_n \uparrow x$ de acuerdo que $x_n \uparrow$ ó $x_n \downarrow$.

Anexamos a $\mathbb{R}$ los símbolos $-\infty$ y ∞ (o $= +\infty$) y les llamamos "*menos infinito*" y "*más infinito*", respectivamente, y extendemos el orden natural de $\mathbb{R}$ a estos símbolos haciendo que

$$-\infty < x < \infty \text{ para todo } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

Las operaciones algebraicas del sistema

$$[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$$

se introducirán más adelante en 1.2.8 del capítulo 1.

Motivados por 1 del teorema anterior, definimos

$$\sup E = \infty \text{ (resp. ínf } E = -\infty)$$

si E no es superiormente (resp. inferiormente) acotado en $\mathbb{R}$.

Definición 0.6.5. *Si $\{x_n\}_1^\infty$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ y para cada número real $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ (resp. $x_n < -M$) para todo $n \geq \mathbb{N}$, entonces decimos que $x_n \to \infty$ (resp. que $x_n \to -\infty$) cuando $n \to \infty$ y escribimos $\lim_n x_n = \infty$ (resp. $\lim_n x_n = -\infty$).*

Definición 0.6.6. *Sea $\{x_n\}_1^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Sea E el conjunto de todos los números x en $[-\infty, \infty]$ para los cuales existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \to x$. Entonces, evidentemente, $S = \sup E$ y $s = \text{ínf } E$ existen en $[-\infty, \infty]$ y se llaman respectivamente el* límite superior *y el* límite inferior *de $\{x_n\}_1^\infty$. Denotamos*

$$S = \limsup_n x_n = \overline{\lim_n} x_n \quad y \quad s = \liminf_n x_n = \underline{\lim_n} x_n$$

Teorema 0.6.7. *Sea $\{x_n\}_1^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sean $S = \overline{\lim_n} x_n$ y $s = \underline{\lim_n} x_n$. Entonces:*

1. *S es el único número en $[-\infty, \infty]$ tal que existe una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente a S y tal que si $S < x \in [-\infty, \infty]$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < x$ para todo $n \geq N$.*

2. *Un resultado análogo al dado en 1, es cierto para s.*

3. *La sucesión $\{x_n\}_1^\infty$ converge a l en $[-\infty, \infty]$ si y sólo si $s = S = l$.*

4. *Si $S' = \overline{\lim_n} y_n$ y $s' = \underline{\lim_n} y_n$ con $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$, algún $N \in \mathbb{N}$, entonces $s \leq s'$ y $S \leq S'$.*

5. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ sean $a_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$ y $b_k = \text{ínf}\{x_n : n \geq k\}$. Entonces $a_k \downarrow$ y $b_k \uparrow$. Además,*

$$S = \lim_k a_k = \inf_k a_k \quad y \quad s = \lim_k b_k = \sup_k b_k.$$

Sea f una función real definida en (a, b), $-\infty < a < b < \infty$. Sea $x \in [a, b)$. Si para cada sucesión $\{t_n\}_1^\infty$ en (x, b) con $\lim_n t_n = x$ se tiene que

$$\lim_n f(t_n) = q \in [-\infty, \infty],$$

decimos que $f(x^+) = q$.

De manera similar, decimos que $f(x^-) = p \in [-\infty, \infty]$ si $\lim_n f(t_n) = p$ para toda sucesión $\{t_n\}_1^\infty$ en (a, x) tal que $t_n \to x$, donde $x \in (a, b]$.

Es claro que

$$\lim_{t \to x} f(t) \text{ existe para } x \in (a, b) \text{ si y sólo si } f(x^+) = f(x^-).$$

Si

$$f(x) \geq f(y) \text{ siempre que } x, y \in (a, b) \text{ y } x \geq y,$$

entonces decimos que f es *no decreciente* en (a, b) y de manera similar se define una función *no creciente* en (a, b).

La función f se llama *monótona* en (a, b) si f es no decreciente o no creciente en (a, b).

Estas definiciones se extienden de manera natural para las funciones reales definidas en un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$.

Teorema 0.6.8. *Sea f una función real definida en (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Entonces:*

1. *Si f es no decreciente en (a, b), entonces:*

   (A) $\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t)$ *para* $a < x < b$.

   (B) *Si $a < x < y < b$ entonces $f(x^+) \leq f(y^-)$.*

2. *Si f es monótona en (a, b), entonces $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen en $\mathbb{R}$ para todo $x \in (a, b)$. Además, $f(a^+)$ y $f(b^-)$ existen en $[-\infty, \infty]$, y*

   $$f(a^+) = \inf_{a<x<b} f(x) \quad y \quad f(b^-) = \sup_{a<x<b} f(x),$$

   cuando f es no decreciente.

   Un resultado análogo es cierto cuando f es no creciente.

3. *Si f es monótona entonces la colección de los puntos de discontinuidad de f es a lo sumo numerable.*

Para los demás resultados de análisis en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ que serán utilizados en el cuerpo del texto el lector puede consultar Apostol [1] o Rudin [36].

0.7. Espacios Normados

En esta sección damos algunas definiciones y resultados importantes en espacios normados.

Definición 0.7.1. *Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $p : X \to [0, \infty)$ una función. Decimos que p es una* seminorma *en X y que (X, p) es un* espacio seminormado *si*

1. $p(0) = 0$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
3. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in K$.

Definición 0.7.2. *Decimos que la función*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & X & \to & [0, +\infty) \\ & x & \to & \|x\| \end{array}$$

es una norma y que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado *si $\|\cdot\|$ es una seminorma en X y además,*

$$\|x\| = 0 \text{ implica que } x = 0.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La función

$$\begin{array}{rccl} d_{\|\cdot\|} : & X \times X & \to & [0, \infty) \\ & (x, y) & \to & d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|y - x\| \end{array}$$

es una métrica en X, llamada *la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|$. A $(X, d_{\|\cdot\|})$ se le dice el espacio métrico inducido por el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$.

Si $(X, d_{\|\cdot\|})$ es completo, decimos que X o $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach.*

Teorema 0.7.3.

1. *$\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios de Banach con respecto a la norma dada por*

$$\|(x_i)_1^n\| = \left(\sum_1^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

2. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces*

   a) $x_n + y_n \to x + y$

b) $\alpha_n x_n \to \alpha x$

siempre que $x_n \to x$, $y_n \to y$ *en* X *y* $\alpha_n \to \alpha$ *en* $\mathbb{K}$.

3. *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado e* Y *es un subespacio cerrado en* X, *sea*

$$\|x+Y\| = \text{ínf}\{\|x+y\| : y \in Y\}, \quad x \in X.$$

Entonces $(X/Y, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y su topología coincide con la topología cociente.*

Si X *es un espacio de Banach así lo es* $(X/Y, \|\cdot\|)$.

Teorema 0.7.4 (**Sobre Transformaciones Lineales Continuas**).

1. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *e* $(Y, \|\cdot\|)$ *espacios normados y sea* $T : X \to Y$ *lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) T *es continua.*

   b) T *es continua en 0.*

   c) *Existe* $M > 0$, M *real, tal que* $\|Tx\| < M\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

   d) $T(B_X)$ *es acotado, donde* $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

2. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *e* $(Y, \|\cdot\|)$ *espacios normados. Sea*

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y : T \textit{ lineal y continua } \}.$$

Entonces $L(X,Y)$ *es un espacio normado con respecto a la norma*

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x \in X}} \|Tx\|.$$

Si Y *es un espacio de Banach, también lo es* $L(X,Y)$.

3. **Teorema de Hahn-Banach.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y sea* Y *un subespacio de* X. *Si* $f : Y \to \mathbb{K}$ *es un funcional linea continuo,* f *puede extenderse a un funcional lineal* f_0 *definido en todo* X *tal que* $\|f_0\| = \|f\|$.

4. *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, sea* $X^* = L(X, \mathbb{K})$ *con la norma*

$$\|x^*\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x \in X}} |x^*(x)|.$$

El espacio normado X^* *se llama* el espacio dual topológico *de* X.

Si $x_0 \in X \setminus \{0\}$, *entonces existe* $x_0^* \in X^*$ *tal que*

$$x_0^*(x_0) = \|x_0\| \ \ y \ \ \|x_0^*\| = 1.$$

En consecuencia, dados $x, y \in X$, $x \neq y$, *existe* $x^* \in X^*$ *tal que*

$$x^*(x) \neq x^*(y).$$

(Este resultado es una consecuencia de 3.) .

5. *Sea* Y *un subespacio vectorial cerrado en* $(X, \|\cdot\|)$. *Si* $x_0 \in X \setminus Y$, *existe* $x_0^* \in X^*$ *tal que*

$$x_0^*(Y) = 0 \quad y \quad x_0^*(x_0) \neq 0.$$

6. **Teorema de La Transformación Abierta.** *Si* X *e* Y *son espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *es lineal y continua, entonces* T *es una aplicación abierta.*

   En consecuencia, T *es un homeomorfismo si* T *es lineal, biyectiva y continua.*

7. **Teorema del Gráfico Cerrado.** *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *lineal. Sea* $\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in X\}$. Γ_T *se llama* el gráfico de T. *La transformación* T *es continua si y sólo si* Γ_T *es cerrado en* $X \times Y$.

8. **Teorema de Banach-Steinhaus o Principio de Acotación Uniforme.** *Sea* X *un espacio de Banach y sea* Y *un espacio normado. Si* $T_\alpha : X \to Y$ *es lineal y continua para cada* $\alpha \in I$ $(I \neq \emptyset)$ *tal que* $\sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| < \infty$ *para todo* $x \in X$, *entonces* $\sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty$.

9. **Una consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus.** *Si* X *e* Y *son espacios como en 8 y* $\big(T_n\big)_1^\infty$ *es una sucesión en* $L(X, Y)$ *tal que* $\lim\limits_n T_n x = Tx$ *existe para todo* $x \in X$, *entonces* $T \in L(X, Y)$ *y* $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$.

Si X es un espacio normado, entonces X^* es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|x^*\| = \sup_{|x| \leq 1} |x^*(x)|.$$

El dual $(X^*)^*$ de X^* se llama *el segundo dual de* X y se denota por X^{**}.

Como cada vector $x \in X$ puede considerarse como un funcional lineal continuo en X^* por la relación

$$x(x^*) = x^*(x),$$

la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & X & \to & X^{**} \\ & x & \to & Jx \end{array}$$

dada por

$$\begin{array}{rlcl} Jx: & X^* & \to & \mathbb{K} \\ & x^* & \to & Jx(x^*) = x^*(x) \end{array}$$

es lineal e inyectiva y cumple

$$\|Jx\| = \|x\|, \ \forall x \in X.$$

La aplicación J se llama la *aplicación canónica* de X en X^{**}.

Cuando J es biyectiva decimos que X es *un espacio reflexivo*.

Para $1 \leq p < \infty$, sean

$$l_p = \left\{ (x_i)_1^\infty : x_i \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ \sum_1^\infty |x_i|^p < \infty \right\}$$

y

$$\|(x_i)_1^\infty\|_p = \left(\sum_1^\infty |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Entonces $(l_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Para $1 < p < \infty$, $(l_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach reflexivo cuyo dual es $(l_q, \|\cdot\|_q)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

l_1 no es reflexivo.

El espacio

$$l_\infty = \left\{ (x_i)_1^\infty : x_i \in \mathbb{C}, \sup_i |x_i| < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach reflexivo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\left\| (x_i)_1^\infty \right\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Si

$$c_0 = \left\{ (x_i)_1^\infty \ x_i \in \mathbb{C}, \ x_i \to 0 \right\},$$

entonces c_0 es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Se tiene $c_0^* = l_1$ y $l_1^* = l_\infty$. Luego, c_0 no es reflexivo.

Si X es normado, para cada $x^* \in X^*$ sea

$$p_{x^*} = |x^*(x)| \ .$$

Entonces $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ es una familia de seminormas en X que *separa puntos* en el sentido de que

$$\text{dados } x, y \text{ en } X,\ x \neq y; \text{ existe } p_{x^*} \text{ tal que } p_{x^*}(x-y) > 0\ .$$

Para cada $\varepsilon > 0$, sea

$$V(p_{x^*}, \varepsilon) = \{x \in X : p_{x^*}(x) < \varepsilon\}\ .$$

La colección

$$\mathcal{B}(x) = \{U(x; x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon) : x_i^* \in X^*, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < \varepsilon < \infty\}$$

es una base local en x para una topología localmente convexa τ_w en X, donde

$$U(x; x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon) = \{y \in X : p_{x_i^*}(x-y) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

La topología τ_w se llama *la topología débil* de X y se denota por $\sigma(X, X^*)$.

De manera similar, se define la topología localmente convexa τ_{w^*} en X^*, también denotada por $\sigma(X^*, X)$ y se llama *la topología débil** de X^*. Esta topología se da por una base local

$$\mathcal{B}(x^*) = \{U(x^*; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) : x_i \in X, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < \varepsilon < \infty\},$$

donde

$$U(x^*; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{y^* \in X^* : p_{x_i}(x^* - y^*) < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

y $p_{x_i}(y^*) = |y^*(x_i)|$.

Teorema 0.7.5. *Sea X un espacio normado. Entonces:*

1. *(X, τ_w) y (X^*, τ_{w^*}) son de Hausdorff.*

2. **Teorema de Banach-Alaoglu.** *La bola unitaria cerrada*

$$S^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$$

es τ_{w^*}-compacta en X^* .

3. *Si X es un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y sólo si*

$$S = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es τ_w-compacto.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio complejo de Banach. Si existe una función

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot\,,\cdot \rangle : & X \times X & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \to & \langle x,y \rangle \end{array}$$

tal que

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
3. $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

para $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Entonces decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Hilbert* cuya norma se induce por el *producto interno* $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$.

Teorema 0.7.6. *Sea X un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la norma $\|\cdot\|$. Entonces:*

1. **La Desigualdad de Schwarz.**

$$\|(x,y)\| \leq \|x\|.\|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

2. **La Ley del Paralelogramo.**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in X.$$

3. **La Identidad de Polarización.**

$$4\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Definición 0.7.7. *Decimos que los vectores x e y en el espacio de Hilbert X son* ortogonales *si $\langle x, y \rangle = 0$ y escribimos, en símbolos, $x \perp y$.*

Definición 0.7.8. *Si $M \subset X$,* el complemento ortogonal *de M en X, denotado por $M^{\perp}$; es el conjunto dado por*

$$M^{\perp} = \{x \in X : x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Definición 0.7.9. *Una familia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en X se llama* ortogonal *si $x_\alpha \perp x_\beta$ para $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in I$ y se llama* ortonormal *si es ortogonal y $\|x_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in I$.*

Definición 0.7.10. *Decimos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una* base ortonormal *del espacio de Hilbert*

X si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *es ortonormal y además,*

$$x = \sum_{\alpha\in I}\langle x, x_\alpha\rangle x_\alpha = \lim_{J\in D}\sum_{\alpha\in J}\langle x, x_\alpha\rangle x_\alpha$$

para todo $x \in X$*, donde* $D = \{J \subset I : J \text{ finito}\}$ *está dirigido por* $J_1 \leq J_2$ *si* $J_1 \subset J_2$.

Teorema 0.7.11. *Sea* X *un espacio de Hilbert con el producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *y la norma* $\|\cdot\|$. *Entonces:*

1. *Si* M *es un subespacio vectorial cerrado en* X*, entonces* $X = M \oplus M^\perp$*. Esto es, cada elemento* $x \in X$ *puede representarse, de forma única, como*

$$x = x_1 + x_2, \text{ con } x_1 \in M \text{ y } x_2 \in M^\perp.$$

2. *Si* $\{e_i\}_{i\in I}$ *es una familia ortonormal en* X *y* x *es un vector arbitrario en* X*, entonces* $N(x) = \{i \in I : \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$ *es vacío o es a lo sumo numerable.*

3. **La Desigualdad de Bessel.** *Si* $(e_i)_{i\in I}$ *es una familia ortonormal en* X *y* $x \in X$*, entonces*

$$\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

4. *Sea* $(e_i)_{i\in I}$ *una familia ortonormal en* X*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) $(e_i)_{i\in I}$ *es una base ortonormal en* H.

   b) $x \perp e_i$ *para todo* $i \in I$ *implica que* $x = 0$.

   c) **La Ecuación de Parseval.**

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I}\|\langle x, e_i\rangle\|^2$$

   para todo $x \in X$.

   d) $(e_i)_{i\in I}$ *es* completo *en el sentido; no existe ninguna familia ortonormal* $(f_j)_{j\in J}$ *tal que* $(e_i)_{i\in I} \subsetneqq (f_j)_{j\in J}$

5. *Todo espacio de Hilbert* $X(\neq \{0\})$ *contiene a una base ortonormal.*

6. X *es separable si y sólo si existe alguna base ortonormal a lo sumo numerable.*

7. *Todas las bases ortonormales de* $X(\neq \{0\})$ *tienen el mismo número cardinal, el cual se llama la* dimensión ortonormal *de* X.

El espacio l^2 es un espacio de Hilbert, cuyo producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se da por

$$\langle (x_i)_1^\infty, (y_i)_1^\infty \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y}_i.$$

Definición 0.7.12. *Si X es un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sea $T : X \to X$ lineal y continua. Entonces T se llama un* operador *en X y la colección de todos los operadores en X se denota por $L(X)$.*

Dado $T \in L(X)$, existe un operador único T^*, que se llama el *operador adjunto* de T, dado por la relación

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

para todo $x, y \in X$.

Si T^* conmuta con T, decimos que T es *normal*.

Decimos que T es un *operador hermitiano* si $T = T^*$.

Si T es una isometría sobreyectiva T se llama *unitario*.

Un operador P se llama una *proyección* si $P^2 = P$ y $P^* = P$.

Teorema 0.7.13. *Sea X un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y la norma $\|\cdot\|$. Sean $T_1, T_2 \in L(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces:*

1. Propiedades del adjunto:
   a) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.
   b) $(\alpha T_1)^* = \overline{\alpha} T_1^*$.
   c) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.
   d) $\|T^*\| = \|T\|$.
2. a) *Si T_1 y T_2 son hermitianos, entonces T_1T_2 es hermitiano si y sólo si $T_1T_2 = T_2T_1$.*
   b) *$\frac{1}{2}(T_1 + T_1^*)$ y $\frac{1}{2}(T_1 - T_1^*)$ son hermitianos y se denotan Re T_1 e Im T_1, respectivamente.*
   c) *T_1 es normal si y sólo si Re T_1 e Im T_1 conmutan.*
   d) *T_1 es normal si y sólo si*
   $$\|T_1x\| = \|T_1^*x\|$$
   para todo $x \in X$.

Para los demás resultados de espacios de Hilbert y de Banach utilizados en el texto, el lector puede ver Taylor y Lay [40]; Halmos [13] y Riesz y Nagy [31]. Para los resultados de análisis funcional en espacios localmente convexos el lector puede consultar Horváth [20]; Kelley y Namioka [21] y Rudin [35].

Capítulo 1

Medidas

En este capítulo introducimos los conceptos de semi-anillo, anillo, álgebra, σ-anillo, σ-álgebra y clase monótona de subconjuntos de un conjunto X, así como el concepto de una medida en un anillo ó σ-anillo de conjuntos. Estudiamos algunas propiedades básicas de una medida. Presentamos un estudio de la equivalencia entre varios axiomas de la teoría de conjuntos y discutimos algunas propiedades de números ordinales y utilizándolos explicamos la construcción del σ-anillo generado por una clase de conjuntos.

Introducción - Motivación de la Integración Abstracta

Entre las teorías posteriores a la de Riemann, la más importante es la de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Expondremos aquí algunos de sus puntos más importantes, los cuales conforman un material básico para la moderna teoría de integración.

Antes de hacer comentarios sobre la teoría de la integración de Lebesgue en $\mathbb{R}$, discutiremos algunas limitaciones que presenta la teoría clásica de la integral de Riemann, las cuales obligaron a los matemáticos a estudiar el concepto de integral desde otros puntos de vista.

Sea f una función real y acotada en el intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Si

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

existe, donde $\|P\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$ y $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces decimos que f *es integrable en el sentido de Riemann o Riemann-integrable* en $[a, b]$ y denotamos al límite por

$$(R)\int_a^b f(x)dx.$$

Un teorema importante en la teoría de integración de Riemann dice: *"Una función f real y acotada en $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, es Riemann-integrable en $[a,b]$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\left\{I_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos o cerrados tal que cada punto de discontinuidad de f en $[a,b]$ está en algún I_j y además,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon,$$

donde $|I_j|$ denota la longitud del intervalo I_j".

La condición para que una función real y acotada en $[a,\, b]$ sea Riemann integrable es tan fuerte, que sólo bajo la convergencia uniforme, el límite de una sucesión acotada de funciones Riemann-integrables es también integrable. Este resultado no es cierto con respecto al límite puntual como veremos en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.0.1. *Sea $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$, $x \in [0,1]$.*

Entonces, para x en $[0,1]$, se ve que $0 \leq f_m(x) \leq 1$. Específicamente, $f_m(x) = 0$ si $m!x$ no es un entero y $f_m(x) = 1$ en caso contrario.

Como la discontinuidad de f_m ocurre en un número finito de puntos de $[0,1]$, por el criterio mencionado anteriormente, f_m es Riemann-integrable y además, $\{f_m\}_1^{\infty}$ es uniformemente acotada por 1.

Pero la función

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

es discontinua en todo el intervalo $[0,1]$, lo cual implica que f no es Riemann-integrable en $[0,1]$.

El otro punto de vista para el estudio de integración en un nuevo sentido, es el que indicamos a continuación:

Si $R([a,b])$ es la colección de todas las funciones reales Riemann-integrables en $[a,b]$, podemos introducir una pseudométrica d en $R([a,b])$ dada por

$$d(f,g) = (R)\int_a^b |f(x) - g(x)|dx, \quad f,g \in R([a,b]).$$

Entonces sabemos que $R([a,b])$ no es completo con respecto a d.

La falta de completitud del espacio $R([a,b])$ motivó la introducción de un nuevo concepto de integral según el cual la colección de las funciones reales e integrables sea el completamiento del espacio $R([a,b])$.

A comienzos de siglo, Lebesgue introdujo exitosamente una teoría de integración que generaliza la de Riemann. La clase de las funciones integrables en el sentido de Lebesgue (Lebesgue-integrables) en $[a, b]$, contiene a las funciones Riemann-integrables, es cerrada para el límite puntual de sucesiones acotadas y es el completamiento del espacio $R([a, b])$ bajo la pseudométrica inducida por la nueva integral.

Las siguientes observaciones sobre la integral de Lebesgue motivan la teoría de integración abstracta y la de Bochner.

1. En lugar de intervalos, utilizó subconjuntos de $\mathbb{R}$, que llamó medibles; en esta clase están los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos.

2. Utilizando la noción de longitud de intervalos logró asociar a cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ un número único en $[0, \infty) \cup \{\infty\}$, denotado por $m(E)$, tal que para cada intervalo compacto $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es cierto que

   a) $m([a, b]) = m((a, b]) = m((a, b)) = m([a, b)) = b - a$

   b) $m([a, \infty)) = m((a, \infty)) = \infty$

   c) $m((-\infty, a]) = m((-\infty, a)) = m((-\infty, \infty)) = \infty$

   para todo $a \in \mathbb{R}$.

3. La clase $M(\mathbb{R})$ de todos los conjuntos medibles en $\mathbb{R}$ es cerrada bajo las operaciones de unión numerable y complemento. Es decir, $M(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra (ver la sección 1.4).

4. Para cada sucesión numerable $\{E_i\}_1^\infty$, E_i medible, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, se tiene que
$$m\left(\bigcup_1^\infty E_i\right) = \sum_1^\infty m(E_i)$$
   Es decir, m es numerablemente aditiva en $M(\mathbb{R})$ (ver 1.2).

5. Lebesgue introdujo una clase de funciones reales (a la cual pertenecen las funciones reales y continuas en $\mathbb{R}$) llamadas *funciones medibles (medibles de Lebesgue)*, cerrada bajo el límite puntual de sucesiones. (Esta propiedad no la posee la clase de las funciones reales y continuas en $\mathbb{R}$).

6. Pudo definir la integral de funciones no negativas y medibles en cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ con $m(E) < \infty$ ó $m(E) = \infty$.

7. Cuando $m(E) < \infty$, cada función medible y acotada es integrable en E.

8. Cuando $E = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, cada función f, real y Riemann-integrable

en $[a, b]$, es Lebesgue-integrable y

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dm(x)$$

donde, $\int_{[a,b]} f(x)dm(x)$ es la integral de f en $[a, b]$ en el sentido de Lebesgue.

9. Sea $\mathcal{L}_p(E) = \left\{ f : \int_E |f(x)|^p \, dm(x) < \infty \right\}$, $(1 \leq p < \infty)$. Al introducir la relación de equivalencia $\sim$ dada por: $f \sim g$ si

$$\int_E |f(x) - g(x)|^p \, dm(x) = 0, \quad f, g \in \mathcal{L}_p(E)$$

$L_p(E) = \mathcal{L}_p(E)/\sim$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, bajo la norma

$$\left\| \widetilde{f} \right\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dm(x) \right)^{1/p},$$

donde f pertenece a la clase de equivalencia $\widetilde{f}$.

10. $\mathcal{L}_1([a,\, b])$ es el completamiento de $R([a, b])$ y $L_1([a, b])$ es el de $C^r([a, b])$, la colección de todas las funciones reales y continuas definidas sobre el intervalo compacto $[a, b]$.

1.1. Medidas en Intervalos de $\mathbb{R}$

Con el objeto de motivar y explicar la teoría de medida abstracta, estudiamos en esta sección la medida inducida por una función real no decreciente y continua a la derecha en $\mathbb{R}$. En particular, este estudio incluye al de la medida inducida por la longitud de los intervalos en $\mathbb{R}$.

En todo el texto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ denotará al conjunto de todos los intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$. Nótese que cuando $a = b$, $(a, b] = \emptyset$.

La colección de todas las uniones finitas y disjuntas de miembros de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ será denotada por $R(\mathcal{P})$.

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. *Si $A, B \in R(\mathcal{P})$, entonces*

1. $A \cup B \in R(\mathcal{P})$.

2. $A \setminus B \in R(\mathcal{P})$.

Demostración.

1. Sean

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{i=1}^{m} (c_i, d_i],$$

donde $(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset$ y $(c_i, d_i] \cap (c_j, d_j] = \emptyset$ para $i \neq j$.

Sea

$$J_1 = \{j : (a_j, b_j) \cap (c_1, d_1] \neq \emptyset\}.$$

Entonces, sin perdida de generalidad, supondremos que $J_1 = \{j_1, \ldots, j_k\}$ y que

$$a_{j_1} < c_1 < b_{j_1} \leq a_{j_2} < b_{j_2} \leq a_{j_3} \leq \cdots \leq b_{j_k} \leq d_1$$

(ó $d_1 \leq b_{j_k}$).

Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \right) \cup (c_1, d_1] = \bigcup_{j \in I \setminus J_1} (a_j, b_j] \cup (a_{j_1}, b] \in R(\mathcal{P})$$

donde $b = d_1$ si $b_{j_k} \leq d_1$ y $b = b_{j_k}$ en caso contrario.

Si $A \cap (c_1, d_1] = \emptyset$, obviamente, $A \cup (c_1, d_1] \in R(\mathcal{P})$.

Ahora, se deduce por inducción finita, que $A \cup B \in R(\mathcal{P})$.

2. Ya que $(a_i, b_i] \setminus (c_j, d_j]$ es un conjunto de alguna de las formas $(a_i, b_i]$, $(a_i, c_j]$, $(d_j, b_i]$, $(a_i, c_j] \cup (d_j, b_i]$ o $\emptyset$, por 1. se tiene que $A \setminus B \in R(\mathcal{P})$.

$\square$

Nota 1.1.2. *Cuando hablemos del concepto de anillo en la sección 2., diremos que $R(\mathcal{P})$ es un anillo de subconjuntos de $\mathbb{R}$. También veremos que $R(\mathcal{P})$ es el anillo más pequeño que contiene a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Definición. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no decreciente y continua a la derecha. Esto es, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Para $(a, b] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, definamos*

$$l_f((a, b]) = f(b) - f(a).$$

Por ser f no decreciente, $l_f((a, b]) \geq 0$.

Cuando $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$,

$$l_f((a,b]) = \text{longitud del intervalo } (a,b] = b - a.$$

En este caso denotamos a l_f por l y, a veces, también denotamos a $l((a,b]) = |(a,b]|$.

Ahora, desarrollamos algunos lemas para extender la función de conjuntos (intervalos) l_f a $R(\mathcal{P})$, en forma única.

Lema 1.1.3. *Si* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *es una colección finita de miembros de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *con* $E_i \cap E_j = \emptyset$, $(i \neq j)$ *y si* $\bigcup\limits_1^n E_i \subset E_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\sum_1^n l_f(E_i) \leq l_f(E_0).$$

Demostración. Sean $E_i = (a_i, b_i]$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Sin perdida de generalidad, asumiremos que $a_1 \leq a_2 < \cdots < a_n$.

Por hipótesis, tenemos que $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n < b_0$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_1^n l_f(E_i) &= \sum_1^n (f(b_i) - f(a_i)) \\
&\leq \sum_1^n (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_1^n (f(a_{i+1}) - f(b_i)) = f(b_n) - f(a_1) \\
&\leq f(b_0) - f(a_0) = l_f(E_0)\,,
\end{aligned}$$

puesto que f es no decreciente. □

Lema 1.1.4. *Si un intervalo cerrado* $F_0 = [a_0, b_0]$ *está contenido en una unión finita de intervalos acotados y abiertos* $U_1, \ldots, U_n$, *donde* $U_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *entonces*

$$f(b) - f(a) \leq \sum_1^n (f(b_i) - f(a_i)).$$

Demostración. Sea k_1 tal que $a_0 \in U_{k_1}$.

Si $b_{k_1} \leq b_0$, tomamos k_2 tal que $b_{k_1} \in U_{k_2}$,

si $b_{k_2} \leq b_0$, tomamos k_3 tal que $b_{k_2} \in U_{k_3}$;

y así sucesivamente, este proceso termina con algún k_m, cuando $b_{k_m} > b_0$.

Sin perder la generalidad, supondremos que $m = n$ y $k_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, tenemos que

$$a_1 < a_0 < b_1, \quad a_n < b_0 < b_n$$

y para $n > 1$,

$$a_{i+1} < b_i < b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} f(b_0) - f(a_0) &\leq f(b_n) - f(a_1) \\ &= f(b_1) - f(a_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(b_{i+1}) - f(b_i)) - f(b_1) - f(a_1) \\ &\qquad + \sum_{1}^{n-1} (f(b_{i+1}) - f(a_i + 1)) \\ &= \sum_{1}^{n-1} (f(b_i) - f(a_i)) \end{aligned}$$

□

Lema 1.1.5. *Si $\{E_i\}_1^\infty$ es una sucesión de miembros de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y si $E_0 \subset \bigcup_1^\infty E_i$ donde $E_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, entonces*

$$l_f(E_0) \leq \sum_1^\infty l_f(E_i).$$

Demostración. Sean $E_i = (a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $f(a_0) = f(b_0)$ el lema es trivial.

Por lo tanto, sea $f(a_0) < f(b_0)$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < f(b_0) - f(a_0)$.

Como f es continua a la derecha, existen números positivos δ_i ($i \in \mathbb{N}$) y δ_0 tales que $\delta_0 < b_0 - a_0$,

$$f(a_0 + t) - f(a_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \delta_0 \tag{1.1}$$

y

$$0 \leq f(b_i + t) - f(b_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \delta_i,\ i \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Sean $F_0 = [a_0 + \delta_0, b_0]$ y $U_i = (a_i, b_i + \delta_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Entonces, como el compacto F está contenido en $\bigcup_1^\infty U_i$, por el teorema de Heine-Borel 0.5.44, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_0 \subset \bigcup_1^{n_0} U_i$.

Por el lema 1.1.4 y por la desigualdad 1.2, se deduce que

$$\begin{aligned} f(b_0) - f(a_0 + \delta_0) &\leq \sum_1^{n_0} (f(b_i + \delta_i) - f(a_i)) \\ &= \sum_1^{n_0} (f(b_i + \delta_i) - f(b_i)) + \sum_1^{n_0} (f(b_i) - f(a_i)) \\ &< \sum_1^{n_0} (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \\ &\leq \sum_1^{\infty} l_f(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ahora, por las desigualdades 1.1 y 1.3, se tiene que

$$f(b_0) - f(a_0) = f(b_0) - f(a_0 + \delta_0) + f(a_0 + \delta_0) - f(a_0) < \sum_1^{\infty} l_f(E_i) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, el lema queda demostrado. □

Lema 1.1.6. *Si* $\{E_i\}_1^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$ *y si* $E_0 = \bigcup_1^{\infty} E_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *entonces*

$$l_f(E_0) = \sum_1^{\infty} l_f(E_i).$$

En otras palabras, decimos que l_f *es numerablemente aditiva en* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demostración. Por el lema 1.1.5 es cierto que

$$l_f(E_0) \leq \sum_1^{\infty} l_f(E_i)$$

y por el lema 1.1.3 se tiene que

$$\sum_1^{n} l_f(E_i) \leq l_f(E_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo cual implica la desigualdad $\sum_1^{\infty} l_f(E_i) \leq l_f(E_0)$.

Luego, $l_f(E_0) = \sum_1^{\infty} l_f(E_i)$. □

Teorema 1.1.7 (Extensión de l_f a $R(\mathcal{P})$). *Existe una única función de conjuntos* m_f *definida en* $R(\mathcal{P})$ *que cumple las siguientes condiciones:*

1. *m_f es una extensión de l_f.*

2. *Dada una sucesión $\{E_i\}_1^\infty \in R(\mathcal{P})$ con $E_0 = \bigcup\limits_1^\infty E_i \in R(\mathcal{P})$ y con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, entonces*
$$m_f(E_0) = \sum_1^\infty m_f(E_i).$$
(En forma equivalente, diremos que m_f es numerablemente aditiva en $R(\mathcal{P})$).

3. *$0 \leq m_f(E) < \infty$, $E \in R(\mathcal{P})$.*

Demostración.

1. Sea $E \in R(\mathcal{P})$. Entonces existe una colección finita $\{E_i\}_1^n$ de miembros disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $E = \bigcup\limits_1^n E_i$. Definamos
$$m_f(E) = \sum_1^n l_f(E_i).$$

   Afirmación 1. m_f está bien definida en $R(\mathcal{P})$ y $m_f|_{P(\mathbb{R})} = l_f$.

   Supongamos que
$$E = \bigcup_i^n E_i = \bigcup_j^p F_j$$
   donde $E_i, F_j \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, p$, donde $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq i'$ y $F_j \cap F_{j'} = \emptyset$, para $j \neq j'$.

   Entonces,
$$E_i = \bigcup_{j=1}^P (E_i \cap F_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
   $E_i \cap F_j \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $(E_i \cap F_j) \cap (E_i \cap F_{j'}) = \emptyset$, para $j \neq j'$.

   Como $l_f(\emptyset) = 0$, por el Lema 1.1.6 obtenemos que
$$l_f(E_i) = \sum_{j=1}^P l_f(E_i \cap F_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
   y por tanto,
$$\sum_1^n l_f(E_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^P l_f(E_i \cap F_j).$$

De manera similar tendremos que

$$\sum_{1}^{P} l_f(F_j) = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{n} l_f(F_j \cap E_i)\,.$$

Así, m_f está bien definida.

Ahora, es obvio que m_f *extiende a* l_f.

2. *Afirmación 2.* Si $\{E_i\}_i^n \subset R(\mathcal{P}_n)$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $E = \bigcup_i^n E_i$, entonces $E \in R(\mathcal{P})$ y $m_f(E) = \sum_1^n m_f(E_i)$.

   En efecto, por la proposición 1.1.1 e inducción finita, se tiene que $E \in R(\mathcal{P})$. Además, si $E_i = \bigcup_{j=1}^{k(i)} \left(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\right]$ con $\left(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\right] \bigcap \left(a_{j'}^{(i)}, b_{j'}^{(i)}\right] = \emptyset$, para $j \neq j'$, entonces

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k(i)} \left(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\right]\,.$$

   Por la definición de m_f, como $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$, se tiene que

$$m_f(E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k(i)} l_f\left(\left(a_j^{(i)},\, b_j^{(i)}\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m_f(E_i).$$

   Afirmación 3. m_f extiende a l_f de manera única a la clase $R(\mathcal{P})$ como una función de conjuntos con la propiedad dada en la *afirmación 2.*

   En efecto, sea m_f' otra extensión de l_f a $R(\mathcal{P})$, que cumpla la propiedad de dicha afirmación. Sea $E \in R$ con $E = \bigcup_i^n E_i$, $E_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces se ve que

$$m_f(E) = \sum_{1}^{n} l_f(E_i) = \sum_{1}^{n} m_f'(E_i) = m_f'(E).$$

   Afirmación 4. m_f cumple la condición *2* del teorema.

   En efecto, sea $\{E_i\}_1^\infty \subset R(\mathcal{P})$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$, y con $E_0 = \bigcup_1^\infty E_i \in R(\mathcal{P})$. Entonces cada E_i es una unión finita de miembros disjuntos $\{E_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $m_f(E_i) = \sum_{j=1}^{n(i)} l_f(E_{ij})$.

   Puesto que E_0 pertenece a $R(\mathcal{P})$, existe una sucesión finita $\{F_k\}_1^p$ de miembros disjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $E_0 = \bigcup\limits_1^p F_k$. Ahora, por la *Afirmación 2* y por el Lema 1.1.6,

$$\begin{aligned} m_f(E_0) &= \sum_1^p l_f(F_k) = \sum_{k=1}^p l_f\left(F_k \bigcap \left(\bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}}} E_{ij}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{n(i)} l_f(F_k \cap E_{ij}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{n(i)} m_f(F_k \cap E_{ij}) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^\infty m_f(F_k \cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^p m_f(F_k \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^\infty m_f(E_i)\,, \end{aligned}$$

ya que $F_k \cap E_i = \bigcup\limits_{j=1}^n F_k \cap E_{ij} \in R(\mathcal{P})$.

3. Obviamente, $m_f(E)$ es finita y no negativa para todo $E \in R(\mathcal{P})$.

Esto completa la demostración. $\square$

Definición 1.1.8. *Cuando $f(x) = x$ en $\mathbb{R}$, m_f se denota por m. La función de conjuntos m en $R(\mathcal{P})$ se llama* la medida de intervalos*.*

Nota 1.1.9. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es no decreciente y continua a la izquierda, podemos definir*

$$l_f([a,b)) = f(b) - f(a)$$

y obtener una función de conjuntos m_f, que cumpla las condiciones 1, 2 y 3 *del teorema 1.1.7, si reemplazáramos $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ por $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) = \{[a,b) : -\infty < a \le b < \infty\}$ y definiéramos $\mathbb{R}(\widetilde{\mathcal{P}})$ como la clase de todas las uniones finitas de miembros disjuntos de $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$.*

1.2. Medidas Abstractas

Los resultados obtenidos en el 1.1 constituyen una base que justifica la introducción y estudio del concepto de una medida abstracta. La clase de conjuntos cerrada bajo las operaciones de unión y diferencia, como $R(\mathcal{P})$ de la Proposición 1.1.1, se llama anillo de conjuntos, y tales clases R serán el dominio de una medida μ, que es numerablemente aditiva en R, como lo es m_f en $R(\mathcal{P})$. En todo el libro X denota a un conjunto no vacío.

Comencemos con algunas definiciones.

Definición 1.2.1. *Una colección R de subconjuntos de X se llama un* anillo de conjuntos *en X si*

1. $\emptyset \in R$.
2. $A \cup B$ *y* $A \setminus B$ *pertenecen a R, siempre que* $\{A, B\} \subset R$.

Un anillo R de conjuntos en X se llama un álgebra *en X si $X \in R$.*

Nota 1.2.2. *Si las operaciones de adición $(+)$ y producto $(\cdot)$ en un anillo de conjuntos $\mathbb{R}$ se dan por $A + B = A \triangle B$ y $A \cdot B = A \cap B$, entonces $(R, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo en el sentido del álgebra moderna y además es un anillo de Boole. Cuando $\mathbb{R}$ es un álgebra de conjuntos en X, $(R, +, \cdot)$ es un anillo de Boole con identidad. (*Ver el problema 1.6.1*).*

Proposición 1.2.3. *Si R es un anillo de conjuntos en X, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Si $A, B \in R$, entonces $A \cap B \in R$.*
2. *Si $A_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ están en R.*
3. *Si R es un álgebra de conjuntos y si $A \in R$, entonces $A^c \in R$.*
4. *Un anillo de conjuntos R en X es un álgebra de conjuntos en X si y sólo si R es cerrado bajo la operación de complemento.*

Demostración.

1. Si A y $B \in R$, entonces $A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \in R$ por 1a definición 1.2.1.
2. Por *1* de está proposición y por la definición 1.2.1 se obtiene *2*.
3. Es obvia.
4. Es obvia.

□

Ejemplo 1.2.4.

1. *La colección $P(X)$ de todos los subconjuntos de X es un álgebra de conjuntos en X.*
2. *$R(\mathcal{P})$ de la sección anterior, es un anillo de conjuntos en $\mathbb{R}$, pero no es un álgebra.*
3. *Sea R la colección de todos los subconjuntos finitos de X. Entonces R es un anillo de conjuntos en X y R es un álgebra de conjuntos en X si y sólo si X es finito.*

Definición 1.2.5. *El más pequeño anillo de conjuntos en X que contiene a una clase $\mathcal{C}(\neq \emptyset)$ de subconjuntos de X se llama* el anillo generado *por $\mathcal{C}$ en X y se denotará por $R(\mathcal{C})$.*

Proposición 1.2.6. *Sea $\mathcal{C}(\neq \emptyset)$ una clase de subconjuntos de X. Entonces*

$$R(\mathcal{C}) = \bigcap \{R : R \text{ un anillo de conjuntos en } X, R \supset \mathcal{C}\}.$$

Demostración. $P(X)$ es un anillo de conjuntos en X (ver Ejemplo 1.2.4.*1.*) que contiene a $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{F} = \{R : R$ un anillo de conjuntos en $X, R \supset \mathcal{C}\}$ es no vacía.

Como la intersección de una familia no vacía de anillos de conjuntos en X es evidentemente un anillo, $\bigcap\limits_{R \in \mathcal{F}} R$ es un anillo de conjuntos que contiene a $\mathcal{C}$.

Además, cada anillo de conjuntos que contiene a $\mathcal{C}$ debe contener esta intersección. Por lo tanto, $R(\mathcal{C}) = \bigcap\limits_{R \in \mathcal{F}} R$. □

Ejemplo 1.2.7. *El anillo $R(\mathcal{P})$ de la sección anterior, es el anillo generado por $P(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$. En efecto, por la proposición 1.1.1, $R(\mathcal{P})$ es un anillo. Si R_1 es un anillo de conjuntos cualquiera en $\mathbb{R}$, que contiene a $R(\mathcal{P})$, entonces todas las uniones finitas de miembros de $P(\mathbb{R})$ están en R_1 y por tanto, $R(\mathcal{P}) \subset R_1$.*

Definición 1.2.8. *Los símbolos $-\infty$ y ∞ (o $+\infty$) se llaman* "menos infinito" *y* "más infinito"*, respectivamente.*

Denotamos los conjuntos

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$.

$\mathbb{R} \cup \{\infty\} = (-\infty, \infty]$,

$\mathbb{R} \cup \{-\infty\} = [-\infty, \infty)$

y se llaman conjuntos de números reales extendidos.

$[0, \infty] = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \cup \{\infty\}$.

Para el nuevo conjunto $[-\infty, \infty]$, extendemos el orden natural de $\mathbb{R}$, haciendo

$$-\infty < x < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A continuación damos las siguientes *reglas aritméticas para los números reales extendidos*:

1. $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$.
2. $a + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad a \in \mathbb{R}$.

3. $\dfrac{a}{(\pm\infty)} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

4. $(\pm\infty)\cdot a = a\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } a \in (0,\infty]; \\ 0, & \text{si } a = 0; \\ \mp\infty, & \text{si } a \in [-\infty, 0). \end{cases}$

5. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{\pm\infty}{0}$ y $\infty - \infty$, no se definen.

Nota 1.2.9. *En la teoría de integración deseamos que la integral* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm(x)$ *nos dé el valor del área encerrada por el gráfico de la función continua* f *y es por esta razón por la cual* $\infty \cdot 0 = 0$*, pues el área encerrada por la función* $f(x) \equiv 0$ *es cero.*

Definición 1.2.10. *Una función de conjuntos* λ *con valores en* $(0,\infty]$*, definida en una clase* $\mathcal{C}$ *no vacía de conjuntos en* X*, se llama* finitamente aditiva *en* $\mathcal{C}$ *si*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i),$$

siempre que $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{C}$ *con* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$*, y con* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{C}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y se llama* aditiva *en* $\mathcal{C}$ *si*

$$\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F),$$

siempre que $\{E, F, E\cup F\} \subset \mathcal{C}$ *y* $E \cap F = \emptyset$.

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números no negativos, que no es convergente, decimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Así, en este caso, dado $N > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k > N$$

para todo $n > n_0$.

Definición 1.2.11. *Sea* R *un anillo de conjuntos en* X*. Una función de conjuntos* $\mu : R \to [0,\infty]$ *se llama una* medida *en* R *si se cumplen*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. μ *es numerablemente aditiva en* R*, en el sentido*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

siempre que $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ *con* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$ *y* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$.

Definición. *Sea* μ *una medida en un anillo* R *de conjuntos en* X.

Un conjunto $E \in R$ *se llama* de medida finita *si* $\mu(E) < \infty$ *y* de medida σ-finita *o simplemente* σ*-finito si existe* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ *con* $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *y* $\mu(E_n) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Cuando todo $E \in R$ *es de medida finita (respectivamente, de medida* $\sigma-$*finita) decimos que* μ *es una* medida finita *(respectivamente,* σ-finita*) en* R.

Si $X \in R$*, y si* X *es de medida finita (respectivamente, de medida* $\sigma-$*finita) decimos que* μ *es* totalmente finita *(respectivamente,* totalmente σ-finita*) en* R.

Enunciamos la siguiente proposición antes de dar ejemplos de medidas.

Proposición 1.2.12. *Sean* R *un anillo de conjuntos en* X *y* $\mu : R \to [0, \infty]$*. Entonces:*

1. *Si* μ *es una medida en* R*,* μ *es finitamente aditiva en* R.
2. *Si* $\mu(E) < \infty$ *para algún* $E \in \mathbb{R}$ *y si* μ *es numerablemente aditiva en* R*, entonces* $\mu(\emptyset) = 0$.

   Así, μ *es una medida en* R.
3. *En particular,* $\mu : R \to [0, \infty]$ *es una medida en* R *si, y sólo si,* μ *es numerablemente aditiva en* R.

Demostración.

1. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Si hacemos $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$, entonces

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R \text{ con } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in R.$$

   Por *1* y *2* de la definición 1.2.11, tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i),$$

   lo cual prueba *1*.

2. Si $E \in R$ con $\mu(E) < \infty$, entonces haciendo $E_1 = E$, $E_2 = E_3 = \cdots = \emptyset$, tenemos que

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu(E) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i).$$

Como $\mu(E)$ es finita, obtenemos que $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \mu(E_i) = 0$.

Así, $\lim\limits_{n} n\mu(\emptyset) = 0$, lo cual demuestra que $\mu(\emptyset) = 0$.

3. Es inmediato por *2*.

□

Ejemplo 1.2.13.

1. En $\mathcal{P}(X)$ de 1.2.11, definamos μ como sigue:

$$\mu(E) = \begin{cases} \textit{número de elementos en } E, & \textit{si } E \textit{ es finito;} \\ \infty, & \textit{si } E \textit{ es infinito.} \end{cases}$$

Entonces μ es una medida, que es totalmente finita si X es finito y totalmente σ-finita si X es a lo sumo numerable.

2. Sea $X = \mathbb{N}$. En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ se define como en 1. *Esta medida μ se llama* la medida de conteo *y jugará un papel importante en la construcción de algunos contra-ejemplos.*

3. En $\mathcal{P}(X)$, para x_0 fijo en X definimos

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x_0 \notin E; \\ 1, & \textit{si } x_0 \in E. \end{cases}$$

Entonces μ_{x_0} es una medida totalmente finita en $\mathcal{P}(X)$ y se llama la medida de Dirac *en x_0.*

4. La función de conjuntos m_f del Teorema 1.1.7 es una medida finita (no totalmente finita) en $R(\mathcal{P})$.

5. Sean X no numerable y $R = \{A \subset X : A \text{ ó } A^c \text{a lo sumo numerable}\}$. Entonces R es un álgebra en X.

Si $\mu : R \to [0, \infty]$ se da por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \textit{si } E \textit{ es a lo sumo numerable;} \\ 1, & \textit{si } E^c \textit{ es a lo sumo numerable.} \end{cases}$$

Entonces, μ es una medida totalmente finita en R. En efecto, sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, y $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in R$. Se presentan dos casos:

a*) Si cada E_i es a lo sumo numerable entonces así lo será su unión y por lo tanto, obtenemos*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0.$$

b*) Supongamos que existe algún E_i con E_i^c a lo sumo numerable. Entonces por hipótesis, $E_j \subset E_i^c$ para todo $j \neq i$, y en consecuencia, tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E_i) = 1.$$

Como $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_j\right)^c \subset E_i^c$, *entonces* $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c$ *es a lo sumo numerable y así,*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (E_j) = 1.$$

Aunque toda medida es finitamente aditiva, una función de conjuntos finitamente aditiva no es, en general, una medida, tal como muestra el siguiente contraejemplo

Contra-Ejemplo 1.2.14. *Sea $R = P(\mathbb{N})$. Definamos $\mu : R \to [0, \infty]$ como:*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E = \emptyset; \\ \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n^2}, & \text{si } E \text{ es finito;} \\ \infty, & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Entonces μ es finitamente aditiva. Pero, μ no es numerablemente aditiva, ya que

$$\mu(\mathbb{N}) = \infty \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Ahora, introducimos los conceptos de monotonía y sustractividad, además veremos que una medida siempre es monótona y sustractiva.

Definición 1.2.15. *Sea R un anillo de conjuntos. Una función de conjuntos $\mu : R \to [0, \infty]$ se llama:*

Monótona en *R si, dados E, F en R con $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

Sustractiva en *R si, dados E, F en R con $E \subset F$ y $\mu(E) < \infty$, entonces*

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Proposición 1.2.16. *Si μ es una medida en un anillo de conjuntos R entonces μ es monótona y sustractiva en R.*

Demostración. Sean $E, F \in R$, con $E \subset F$. Puesto que μ es finitamente aditiva por la proposición *1.2.12.1*, se tiene que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E),$$

pues $\mu(F \setminus E) \geq O$.

Además, cuando $\mu(E) < \infty$, se ve que $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$. □

Nota 1.2.17. *La proposición 1.2.16 es cierta para funciones de conjuntos μ en un anillo de conjuntos R, cuando μ es aditiva con valores en $[0, \infty]$. Esta observación será usada en las demostraciones de la proposición 1.2.18.1 y en la parte en que 4 implica 1 del teorema 1.2.21.*

Proposición 1.2.18. *Sean R un anillo de conjuntos en X y $\mu : R \to [0, \infty]$.*

1. *Si μ es finitamente aditiva, entonces μ es* numerablemente supra-aditiva *en R, en el sentido de que si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

2. *Si μ es una medida, entonces μ es* numerablemente sub-aditiva *en R, en el sentido de que si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$, entonces*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Demostración.

1. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces, como μ es finitamente aditiva, por la nota 1.2.17, μ es monótona y así obtenemos
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, μ es numerablemente supra-aditiva.

2. Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$, entonces hagamos
$$F_1 = E_1, F_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots, F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i, \ldots$$
Es obvio que,
$$F_i \cap F_j = \emptyset \text{ para } i \neq j,\ F_i \in R \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Como μ es numerablemente aditiva, tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

Pero por 1.2.16, μ es monótona y así, concluimos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

□

A continuación, estudiamos algunos lemas para probar el teorema 1.2.21, el cual da varias caracterizaciones para que $\mu : R \to [0, \infty]$, finitamente aditiva con $\mu(\emptyset) = 0$, sea una medida en el anillo de conjuntos R.

Lema 1.2.19. *Si μ es una medida en un anillo R de conjuntos en X, entonces μ es* continua por abajo*, en el sentido de que dada una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, no decreciente de miembros de R, con $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in R$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Demostración. Haciendo

$$F_1 = E_1,\ F_2 = E_2 \setminus E_1,\ \ldots,\ F_n = E_n \setminus E_{n-1},\ \ldots$$

tenemos que $F_n \in R$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \cap F_m = \emptyset$ para $n \neq m$, y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Ya que μ es numerablemente aditiva y así finitamente aditiva, por la proposición 1.2.12.1, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).\end{aligned}$$

□

Lema 1.2.20. *Si μ es una medida en un anillo R de conjuntos en X, μ es* condicionalmente continua por arriba*, en el sentido de que dada una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, no* *creciente de miembros de R con $\mu(E_{n_0}) < \infty$ para algún n_0, y con $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in R$, se tiene que*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\,.$$

Demostración. Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E_{n_0} como en el enunciado del lema.

Si $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $E_0 = \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} E_n$.

Sea $F_n = E_n \setminus E_0$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_n \downarrow$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Sea

$$G_n = F_{n_0+n-1} \setminus F_{n_0+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Evidentemente, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ y $G_n \cap G_m = \emptyset$, para $n \neq m$.

Como $F_n \downarrow$, entonces $G_n \subset F_{n_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \subset F_{n_0}$. Si la inclusión es estricta, entonces existe un $x_0 \in F_{n_0}$ tal que $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Esto es, $x_0 \notin G_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $x_0 \notin F_{n_0+k-1} \setminus F_{n_0+k'}$ y así, $x_0 \in F_{n_0+k'}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{n_0+k} = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Como μ es numerablemente aditiva en R, por la Proposición 1.2.16 y por la hipótesis de que $\mu(E_{n_0}) < \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mu(F_{n_0}) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{n_0+n-1}) - \mu(F_{n_0+n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu(F_{n_0+k-1}) - \mu(F_{n_0+k})) = \lim_{n\to\infty} \{\mu(F_{n_0}) - \mu(F_{n_0+n})\} \\
&= \mu(F_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).
\end{aligned}$$

Ya que $\mu(F_{n_0}) < \infty$, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = \emptyset$. Es decir,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \{\mu(E_n \setminus E_0)\} = \lim_{n\to\infty} \{\mu(E_n) - \mu(E_0)\},$$

puesto que μ es sustractiva por la proposición 1.2.16 y $\mu(E_0) \leq \mu(E_{n_0}) < \infty$. □

Teorema 1.2.21 (Caracterizaciones de Médidas). *Sea R un anillo de conjuntos en X. Supóngase que μ es una función de conjuntos en R con valores en $[0,\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y μ es finitamente aditiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *μ es numerablemente aditiva en R y así, es una medida.*

2. *μ es continua por abajo en el sentido del lema 1.2.19.*

3. *μ es numerablemente subaditiva en el sentido de la proposición 1.2.18.2.*

4. *Cuando $\mu(R) \subset [0,\infty)$, μ es* continua por arriba*, en el sentido de que si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$, $E_n \downarrow$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in R$, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n).$$

5. *Cuando $\mu(R) \subset [0,\infty)$, μ es* continua por arriba *en $\emptyset$, en el sentido dado en 4, donde se tenía que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.*

Nótese que la condición de que $\mu(\emptyset) = 0$ puede omitirse en la hipótesis sobre μ para las afirmaciones 4 y 5.

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Por e1 lema 1.2.19.

2. $\Rightarrow$ 1. En efecto, sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in R$.

   Hagamos $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$, $F_n \uparrow$ y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

   Por 2 y por la hipótesis de que μ es finitamente aditiva en R, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\\ &= \lim_n \mu\sum_{i=1}^{\infty}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\end{aligned}$$

1. $\Rightarrow$ 3. Por la proposición 1.2.18.2.

3. $\Rightarrow$ 1. En efecto, si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in R$, entonces por la hipótesis de que μ es finitamente aditiva en R con $\mu(R)$ en $[0,\infty]$, y por la proposición 1.2.18.1, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Pero, por 3, μ es numerablemente subaditiva y así,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Así, la implicación queda demostrada.

1. $\Rightarrow$ 4. Por el lema 1.2.20.

4. $\Rightarrow$ 5. Es evidente.

5. $\Rightarrow$ 2. En efecto, sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$, $E_i \uparrow$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = E \in R$.

Entonces $\{E \setminus E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R$, $E \setminus E_i \downarrow$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (E \setminus E_i) = \emptyset$.

Por 5, tenemos que

$$0 = \mu(\emptyset) = \lim_n \mu(E \setminus E_n) = \mu(E) - \lim_n \mu(E_n),$$

donde aplicamos 1.2.17. Es decir, $\mu(E) = \lim\limits_n \mu(E_n)$ y así deducimos 2.

La demostración queda completa. $\square$

El lema 1.2.20 no es cierto si la condición $\mu(E_n) < \infty$ para a1gún n se omite, como lo muestra el siguiente contraejemplo.

Contra-Ejemplo 1.2.22. *Sea μ la medida de conteo en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ver el ejemplo 1.2.13.2) y sea $E_n = \{n, n+1, \dots\}$. Entonces $E_n \in R = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ y $E_n \downarrow$. Pero $\mu(E) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Así, tenemos que*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \lim_n \mu(E_n).$$

Vimos que 1 y 2 en el teorema 1.2.21 son equivalentes y así, no podemos omitir la hipótesis de que μ es numerablemente aditiva en el lema 1.2.19. Sin embargo, el siguiente contraejemplo también explica este hecho.

Contra-Ejemplo 1.2.23. *Sea $\mu : R = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$,*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E = \emptyset; \\ \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n^2}, & \text{si } E \text{ es finito;} \\ \infty, & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Evidentemente, μ es finitamente aditiva, pero no es numerablemente aditiva (ver 1.2.14).

Si $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, *entonces* $E_n \uparrow$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$ *y*

$$\infty = \mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_n \mu(E_n).$$

1.3. Semi-Anillos y Retículos de Conjuntos

Una ampliación de las propiedades de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de la sección 1.1, es fundamental en el estudio de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y, con mayor generalidad, en el estudio de la medida producto. En esta sección damos esta generalización, la cual será llamada un semi-anillo y extendemos los resultados de la sección 1.1 para semi-anillos. En [43] el dominio de una medida se toma como un semi-anillo. A la luz del Teorema 1.3.8, una medida definida en un semi anillo siempre tiene una extensión única, como una medida, al anillo generado y, por lo tanto, el dominio de una medida se puede tomar como un anillo. También introducimos el concepto de retículos de conjuntos y probamos que una medida finita definida en el anillo generado por un retículo de conjuntos L está determinada por sus valores en L.

Definición 1.3.1. Un Semi-anillo *es una clase no vacía* $\mathbb{P}$ *de conjuntos en* X *tal que*

1. *Si* $E, F \in \mathbb{P}$, *entonces* $E \cap F \in \mathbb{P}$.
2. *Si* $E, F \in \mathbb{P}$ *y si* $E \subset F$, *entonces existe una familia finita* $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\} \subset \mathbb{P}$ *tal que*

$$E = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = F \quad y \quad D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathbb{P}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1.3.2.

1. *La colección* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *de la sección 1 es un semi-anillo de conjuntos en* $\mathbb{R}$, *pero no es un anillo.*
2. *Todo anillo de conjuntos es un semi-anillo.*

Nota 1.3.3. *En Zaanen [44] un semi-anillo de conjuntos se define de una manera más débil, pero luego el* σ*-anillo generado por un semi-anillo* $\mathcal{P}$ *es el mismo en ambos casos.*

Proposición 1.3.4.

1. *Si* $\mathcal{P}$ *es un semi-anillo de conjuntos en* X, *entonces* $\emptyset \in \mathcal{P}$.
2. *Si* $\mathcal{P}_1$ *y* $\mathcal{P}_2$ *son semi-anillos de conjuntos en* X *e* Y, *respectivamente, así lo es*

$$\mathbb{P}_1 \,\widehat{x}\, \mathbb{P}_2 = \{E \times F : E \in \mathcal{P}_1, F \in \mathcal{P}_2\}$$

en $X \times Y$.

Demostración.

1. Por la Definición 1.3.1, $\mathcal{P}$ es no vacío. Sea $E \in \mathcal{P}$. Entonces $E \subset E$ y cualquier miembro de la cadena $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ en 2 de la definición 1.3.1, en este caso coincide con el conjunto E y así, $\emptyset = E \setminus E = D_i \in \mathcal{P}$.

2. Por 1., $\emptyset \times \emptyset \in \mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2$ y así, $\mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$. Si $E_1, F_1 \in \mathcal{P}_1$ y $E_2, F_2 \in \mathbb{P}_2$, entonces

$$(E_1 \times E_2) \cap (F_1 \times F_2) = (E_1 \cap F_1) \times (E_2 \cap F_2) \times \mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2,$$

por 1 de la definición 1.3.1.

Supóngase que $E_1 \times E_2 \subset F_1 \times F_2$. Entonces $E_1 \subset F_1$ y $E_2 \subset F_2$.

Sean
$$E_i = C_0^{(1)} \subset C_1^{(1)} \subset \cdots \subset C_n^{(1)} = F_1$$
y
$$E_2 = C_0^{(2)} \subset C_1^{(2)} \subset \cdots \subset C_m^{(2)} = F_2,$$

donde

$$C_j^{(1)} \text{ y } D_j^{(1)} = C_j^{(1)} \setminus C_{j-1}^{(1)} \in \mathcal{P}_1 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$C_j^{(2)} \text{ y } D_j^{(2)} = C_j^{(2)} \setminus C_{j-1}^{(2)} \in \mathcal{P}_2 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 = C_0^{(1)} \times C_0^{(2)} \subset C_1^{(1)} \times C_0^{(2)} \subset \ldots \\ \subset C_n^{(1)} \times C_0^{(2)} \subset C_n^{(1)} \times C_1^{(2)} \subset \ldots \\ \subset C_n^{(2)} \times C_m^{(2)} = F_1 \times F_2. \end{aligned}$$

Entonces cada miembro de la cadena pertenece a $\mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2$ y además,

$$(C_i^{(1)} \times C_0^{(2)}) \setminus (C_{i-1}^{(1)} \times C_0^{(2)}) = (C_i^{(1)} \setminus C_{i-1}^{(1)}) \times C_0^{(2)} \in \mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$(C_n^{(1)} \times C_i^{(2)}) \setminus (C_n^{(1)} \times C_{i-1}^{(2)}) = C_n^{(1)} \times (C_i^{(2)} \setminus C_{i-1}^{(2)}) \in \mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}_1 \widehat{x} \mathcal{P}_2$ es un semi-anillo.

$\square$

Corolario 1.3.5.

1. *Si* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ *son semi-anillos de conjuntos en* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *respectivamente, entonces*
$$\mathcal{P}_1 \,\widehat{x}\, \mathcal{P}_2 \,\widehat{x}\, \cdots \,\widehat{x}\mathcal{P}_n = \widehat{\prod_{i=1}^{n}} \mathcal{P}_i$$
es un semi-anillo de conjuntos en $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

2. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \widehat{\prod_{1}^{n}} \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *la colección de todos los conjuntos* E *de la forma*
$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -\infty < a_i < x_i \leq b_i < \infty,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$
es un semi-anillo de conjuntos en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. Se deduce a partir de la proposición 1.3.4 por inducción.
2. Es inmediato por 1, pues $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un semi-anillo.

□

Nota 1.3.6. *El semi-anillo* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *jugará un papel importante en el estudio de la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. *Cuando* R_i, $i = 1, 2$ *son anillos, por el corolario 1.3.5,* $R_1 \,\widehat{x}\, R_2$ *es un semi-anillo, lo cual será básico en el estudio de la medida producto.*

Proposición 1.3.7.

1. *Un semi-anillo* $\mathcal{P}$, *cerrado por la operación de unión de sus miembros es un anillo.*
2. *El anillo generado por un semi-anillo* $\mathcal{P}$ *de conjuntos en* X, *se da por la colección de todas las uniones finitas de miembros disjuntos de* $\mathcal{P}$.

Demostración.

1. Sean E y F en $\mathcal{P}$.

   Por hipótesis, $E \cup F \in \mathcal{P}$.

   Ahora, $E \cap F \in \mathcal{P}$ y $E \cap F \subset E$. Por la definición 1.3.1.2 existe una cadena finita de conjuntos $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\} \subset \mathcal{P}$ tal que
$$E \cap F = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = E$$

con $C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por hipótesis,

$$E \setminus F = E \setminus E \cap F = \bigcup_{1}^{n} (C_i \setminus C_{i-1}) \in \mathcal{P},$$

y por lo tanto, $\mathcal{P}$ es un anillo.

2. Sea $R = \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i : E_i \in \mathcal{P},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i \neq j,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

   Entonces R es cerrado por las uniones disjuntas.

   Afirmamos que R es un semi-anillo. En efecto, si

   $$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad F = \bigcup_{j=1}^{m} F_j, \quad E_i \cap E_{i'} = \emptyset$$

   para $i \neq i'$, $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{P}$, $F_j \cap F_{j'} = \emptyset$ para $j \neq j'$, $\{F_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{P}$, entonces

   $$E \cap F = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j),$$

   y $\{(E_i \cap F_j)\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}}$ es una fami1ia de miembros disjuntos de $\mathcal{P}$.

   Por lo tanto, $E \cap F \in R$.

   Ahora, sean $E, F \in \mathcal{P}$ con $E \subset F$.

   Por la definición 1.3.1.2, $F \setminus E$ es una unión finita de miembros disjuntos de $\mathcal{P}$ y por lo tanto, $F \setminus E \in R$.

   Si $E \in \mathcal{P}$ y $F \in R$ con $E \subset F$, existe una familia finita $\{F_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}$ tal que $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$. Luego, $F \setminus E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (F_i \setminus E) \in R$, puesto que $F_i \setminus E = F_i \setminus F_i \cap E \in R$ por el caso anterior y R es cerrado por unión finita de miembros disjuntos de R.

   Por último, si E y $F \in R$ con $E \subset F$, sea $E = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, donde $\{E_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathcal{P}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces

   $$F \setminus E = F \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i = F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i \right) = F \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i^c \right) = \bigcap_{i=1}^{m} (F \setminus E_i) \in R,$$

   por el hecho de que R es cerrado por intersección finita de sus miembros, y $F \setminus E_i \in R$, por el caso anterior, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Por lo tanto, podemos tomar $E = C_0 \subset C_1 = F$ con $C_0, C_1 \in R$ y $C_1 \setminus C_0 \in R$ y $F \setminus E = C_1 \setminus C_0$. En consecuencia, R es un semi-anillo.

Ahora, dados $E, F \in R$, tenemos que

$$E \cup F = E \cup (F \setminus E) = E \cup (F \setminus E \cup F),$$

que es una unión disjunta de miembros de R; luego, $E \cap F \in R$.

Ahora, por 1, R es un anillo.

Si R_1 es un anillo arbitrario que contiene a $\mathcal{P}$, entonces $R_1 \supset R$ y por lo tanto, $R = R(\mathcal{P})$.

□

Teorema 1.3.8 (Extensión de Funciones de Conjuntos Numerablemente Aditivas en Semi-Anillos). *Sea μ una función de conjuntos en un semi-anillo $\mathcal{P}$ de conjuntos en X con valores en $[0, \infty)$ o $[0, \infty]$. Supóngase que $\mu(\emptyset) = 0$ y que μ es numerablemente aditiva en $\mathcal{P}$, en el sentido de que si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}$, se tiene que $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.*

Entonces, existe una medida $\widetilde{\mu}$ única en $R(\mathcal{P})$, tal que $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{P}$.

Si $X \in \mathcal{P}$ y $\mu(X) < \infty$ o $\mu(X)$ es σ-finita, así lo es $\widetilde{\mu}$.

Si μ es finita en $\mathcal{P}$ o μ es σ-finita en $\mathcal{P}$, también lo es $\widetilde{\mu}$.

(Las definiciones de μ finita y σ-finita en $\mathcal{P}$ son similares a las dadas en la definición 1.2.11).

Demostración. La prueba del teorema 1.1.7 es válida para demostrar la primera parte si se reemplaza $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ por $\mathcal{P}$. Las demás partes son obvias. □

Ahora, introducimos otro concepto que se aplicará luego en el estudio de medidas en espacios topológicos.

Definición 1.3.9. *Un* retículo de conjuntos *en un conjunto X es una clase L de subconjuntos de X tal que*

1. *$\emptyset \in L$.*

2. *Si $E, F \in L$ entonces $E \cup F \in L$ y $E \cap F \in L$.*

Proposición 1.3.10. *Sea L un retículo de conjuntos en X.*

Si $\mathcal{P} = \{F \setminus E : E, F \in L$ con $E \subset F\}$, entonces $\mathcal{P}$ es un semi-anillo y $L \subset \mathcal{P}$.

También, $\mathcal{P} = \{F \setminus E : E, F \in L\}$ lo es.

Demostración. Como $\emptyset \in L$, $L \subset \mathcal{P}$.

Sean $D_i = F_i \setminus E_i$, $E_i \subset F_i$, $E_i, F_i \in L$, $i = 1, 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 &= (F_1 \setminus E_1) \cap (F_2 \setminus E_2) = F_1 \cap F_2 \cap (E_1^c \cap E_2^c) \\ &= (F_1 \cap F_2) \setminus (F_1 \cap F_2) \cap (E_1 \cup E_2). \end{aligned}$$

Por hipótesis, $F_1 \cap F_2 \in L$, $E_1 \cup E_2 \in L$ y así, $(F_1 \cap F_2) \cap (E_1 \cup E_2) \in L$. En consecuencia, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{P}$.

Si $D_1 \supset D_2$, hacemos $C = (F_1 \cap F_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Entonces,

$$D_2 = F_2 \setminus E_2 = F_2 \cap E_2^c \subset F_1 \cap E_1^c$$

ya que $D_2 \subset D_1$, y por lo tanto,

$$D_2 \subset (F_1 \cap E_1^c) \cap F_2 = (F_1 \cap F_2) \setminus F_1 \cap F_2 \cap E_1 = (F_1 \cap F_2) \setminus (F_2 \cap E_1) = C$$

y $C = F_1 \cap F_2 \cap E_1^c \subset F_1 \cap E_1^c = D_1$.

Así, $D_2 \subset C \subset D_1$, $C \in \mathcal{P}$ y además,

$$\begin{aligned} C \setminus D_2 &= F_1 \cap F_2 \cap E_1^c \setminus (F_2 \setminus E_2) = F_1 \cap F_2 \cap E_1^c \cap (F_2^c \cup E_2) = F_1 \cap F_2 \cap E_2 \cap E_1^c \\ &= (F_1 \cap E_2) \setminus E_1 \cap E_2 \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Asimismo $D_1 \setminus C \in \mathcal{P}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es un semi-anillo.

La última parte es obvia pues $F \setminus E = F \setminus (F(F \setminus E)$. $\square$

Proposición 1.3.11. *Sea L un retículo de conjuntos en X. Sea $\mathcal{P}$ tal como en la proposición 1.3.10.*

Si $R = R(\mathcal{P})$, entonces R es también el anillo generado por L en X.

Si $X \in L$, entonces R es el álgebra más pequeña de conjuntos en X que contiene a L.

Demostración. Si R_1 es un anillo de conjuntos en X que contiene a L, entonces para E, F en L con $E \subset F$, se tiene que $F \setminus E \in R_1$ y por lo tanto, $\mathcal{P} \subset R_1$.

Así, $R(\mathcal{P}) = R \subset R_1$, lo cual implica que $R \subset R(L)$.

Pero, $L \subset P$ y así, $R(L) \subset R(\mathbb{P}) = R$. Es decir, $R = \mathbb{R}(L)$.

Si $x \in L$, entonces $x \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $x \in R$ y en este caso $R = R(\mathcal{P})$ es un álgebra. Evidentemente, $R(\mathcal{P})$ es el álgebra más pequeña de conjuntos en X que contiene a L. □

Teorema 1.3.12 (Un Teorema de Unicidad). *Sean μ y υ dos medidas en un anillo R generado por un retículo L de conjuntos en X. Si $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in L$, entonces $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in R$, cuando μ o υ es finita en L.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{F \setminus E : E, F \in L,\ E \subset F\}$.

Supóngase que $\mu_{|_L}$ es finita. Entonces, por hipótesis, $\upsilon_{|_L}$ es finita. Además, por la proposición 1.2.16,

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E) = \upsilon(F) - \upsilon(E) = \upsilon(F \setminus E).$$

Por lo tanto, $\mu_{|_\mathcal{P}} = \upsilon_{|_\mathcal{P}}$.

Ya que $R = R(L) = R(\mathcal{P})$ (ver la proposición 1.3.11), $R(L)$ es la colección de todas las uniones finitas de miembros disjuntos de $\mathcal{P}$, por las proposiciones 1.3.10 y 1.3.7.

Como μ y υ son finitamente aditivas en R se tiene que $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in R$. □

Nota 1.3.13.

1. *Si X es un espacio topológico y L es la colección de todos los conjuntos abiertos en X, entonces L es un retículo de conjuntos en X y es obvio que, en general, L no es un anillo.*

2. *El concepto de retículos de conjuntos será muy útil en el estudio de medidas en espacios topológicos.*

3. *Una generalización del Teorema 1.3.12 con algunas aplicaciones a las medidas de Baire y de Borel será discutida en 1.5 (ver 1.5.32, 1.5.33 y 1.5.36).*

1.4. Medidas en σ-anillos y Clases Monótonas

En la teoría de la integración de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sabemos que la colección $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de todos los conjuntos medibles de Lebesgue forma un álgebra de conjuntos en $\mathbb{R}$, cerrada por las uniones numerable de sus miembros. Esta propiedad de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ implica que la colección de todas las funciones medibles (Lebesgue) es cerrada bajo el límite puntual de sucesiones de funciones medibles. Además, el hecho de que m es numerablemente aditiva en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ permite que más funciones sean integrables y por lo tanto, en la teoría de integración abstracta necesitamos un anillo que se comporte como $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ con respecto a la unión numerable de sus miembros. Este tipo de anillo será llamado σ-anillo. En esta sección estudiaremos las propiedades de los σ-anillos y las σ-álgebras. También, introduciremos otra clase de conjuntos, llamada clase monótona, que jugará un papel importante en el estudio de la unicidad de la extensión de medidas σ-finitas. Además, daremos algunas propiedades adicionales de las medidas definidas en σ-anillos.

Definición 1.4.1. Un σ-anillo *(respectivamente,* una σ-álgebra*) S de conjuntos en un conjunto X, es un anillo (respectivamente, álgebra) de conjuntos en X que cumple la propiedad adicional:*

Dada una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de miembros de S, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.

Ejemplo 1.4.2.

1. *La familia $\mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra de conjuntos en X.*

2. *Si X es un conjunto infinito, no numerable y si S es la clase de todos los subconjuntos de X a lo sumo numerables, entonces S es un σ-anillo, pero no es una σ-álgebra.*

3. *Si X es un espacio métrico completo o un espacio localmente compacto y de Hausdorff, la colección de todos los subconjuntos de primera categoría en X es un σ-anillo, pero no es una σ-álgebra. Este resultado es debido al hecho de que X es de segunda categoría en sí mismo y la unión numerable de conjuntos de primera categoría en X es de primera categoría en X (ver el teorema 0.5.45.10).*

4. *En 3, si $S = \{A \subset X : A \text{ o } A^c \text{ es de primera categoría en } X\}$, entonces S es una σ-álgebra. En efecto, obviamente S es un álgebra de conjuntos en X. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ y si cada A_i es de primera categoría en X, así lo será $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Si algún A_i^c es de primera categoría en X, entonces $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \subset A_i^c$ y por lo tanto $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ es de primera categoría en X, lo cual implica que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.*

5. *El álgebra R en el ejemplo 5 de 1.2.13, es una σ-álgebra.*

6. *Si X es un espacio topológico discreto, entonces L, la colección de todos los conjuntos abiertos en X, es una σ-álgebra.*

Proposición 1.4.3. *Si S es un σ-anillo de conjuntos en X, entonces para $\{E_i\} \subset S$, se tiene que $\bigcap\limits_{1}^{\infty} E_i \in S$.*

Demostración. Si $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces $E \in S$. Ahora,

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c \cap E = E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = E \setminus \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)\right) = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap E_i^c)\right) \\ &= E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \setminus E_i)\right) \in S.\end{aligned}$$

□

Definición 1.4.4.

1. *Si $E \subset X$, la función $\chi_E : X \to \{0,1\}$ dada por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in E; \\ 0, & si\ x \notin E. \end{cases}$$

es llamada la función característica de E.

2. *Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos en X. Se definen y denotan, los siguientes conjuntos:*

   a*)* El límite superior de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\overline{\lim_n} E_n = \{x \in X : \overline{\lim_n} \chi_{E_n}(x) = 1\}.$$

   También suele usarse la notación $\operatorname*{lím\,sup}_n E_n$.

   b*)* El límite inferior de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\underline{\lim_n} E_n = \{x \in X : \underline{\lim_n} \chi_{E_n}(x) = 1\}.$$

   También suele usarse la notación $\operatorname*{lím\,inf}_n E_n$.

   c*) Cuando* $\overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n} E_n$*, este valor común se llama* el límite de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y se denota por* $\operatorname*{lím}_n E_n$.

Proposición 1.4.5. *Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos en X, entonces*

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n} E_n &= \{x \in X : x \textit{ pertenece a un número infinito de} \{E_n\}_{n=1}^{\infty}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\underline{\lim_n} E_n &= \{x \in X : x \textit{ pertenece a todo } E_n, \textit{ excepto un número finito de } n\text{'s}\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{r=n}^{\infty} E_r.\end{aligned}$$

En consecuencia, si $E_n \uparrow$ (respectivamente, $E_n \downarrow$) entonces

$$\overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \textit{ (respectivamente, } \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\textit{).}$$

Demostración. Sea $F = \{x \in X : x$ pertenece a un número infinito de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\}$.

Sea $x \in F$ y supóngase que $x \in E_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Entonces $\chi_{E_{n_i}}(x) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $\lim_{i \to \infty} \chi_{E_{n_i}}(x) = 1$.

En consecuencia, $\overline{\lim_n} \chi_{E_n}(x) = 1$, lo que implica que $x \in \overline{\lim_n} E_n$ y así, $F \subset \overline{\lim_n} E_n$.

Recíprocamente, si $x \in E^*$, entonces existe una subsucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \to \infty} \chi_{E_{n_i}}(x) = 1$. Puesto que $\chi_{E_{n_i}}(x)$ es 0 o 1, es obvio que $x \in E_{n_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, excepto un número finito de los $i's$. Por lo tanto, $x \in F$ y así, $\overline{\lim_n} E_n \subset F$.

Luego, $F = \overline{\lim_n} E_n$.

Ahora, si $x \in \overline{\lim_n} E_n$, entonces por la primera parte existe una subsucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe un n_i con $n < n_i$ y por lo tanto, $x \in \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r$. Esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ y así,

$$\overline{\lim_n} E_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r.$$

Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r$ entonces,

para $n = 1$, existe $n_1 > 1$ tal que $x \in E_{n-1}$;

para $n = n_1 + 1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $x \in E_{n_2}$,

Continuando así, inductivamente, tenemos la existencia de una subsucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_k}$ para $k = 1, 2, \ldots$ y luego, por la primera parte, $x \in \overline{\lim_n} E_n$. Esto prueba que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r \subset \overline{\lim_n} E_n.$$

En conclusión
$$\overline{\lim_n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=n}^{\infty} E_r.$$

Ahora, sea $G = \{x \in X : x \in E, \forall n \in \mathbb{N},$ salvo un número finito de los $n's\}$.

Sea $x \in G$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $x \in E_n$, y en consecuencia, $\underline{\lim}_n \chi_{E_n}(x) = 1$. Es decir, $x \in \underline{\lim}_n E_n$ y así, $G \subset \underline{\lim}_n E_n$.

Recíprocamente, si $x \in \underline{\lim}_n E_n$, entonces $\underline{\lim}_n \chi_{E_n}(x) = 1$, lo cual implica que existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $\chi_{E_n}(x) > 0$ y así, $x \in E_n$ para todo $n > n_0$. Esto es, $x \in G$ y así $\underline{\lim}_n E_n \subset G$.

Por lo tanto, $G = \underline{\lim}_n E_n$.

Sea $x \in \underline{\lim}_n E_n$. Entonces $x \in G$ y así existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_n$ para todo $n \geq n_0$. Es decir, $x \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Esto es,
$$\underline{\lim_n} E_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, entonces, para algún n_0, $x \in E_k$ para todo $k > n_0$ y así, $x \in G = \underline{\lim}_n E_n$. Esto es,
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \subset \underline{\lim_n} E_n.$$

En conclusión,
$$\underline{\lim_n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Por último, supóngase que $E_n \uparrow$. Por la parte anterior, $\overline{\lim}_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.

Como $E_n \uparrow$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ para todo n y así, $\overline{\lim}_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Además, $\underline{\lim}_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \overline{\lim}_n E_n$.

Cuando $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no creciente, la demostración es similar. $\square$

Para una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ arbitraria de conjuntos no necesariamente $\lim_n E_n$ existe, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.6. *Sean $E_{2n} = A$, $E_{2n-1} = B$, $n \in \mathbb{N}$, $A \neq B$. Entonces*

$$\overline{\lim_n} E_n = A \cup B \quad y \quad \underline{\lim_n} E_n = A \cap B.$$

Por lo tanto, $\lim_n E_n$ no necesariamente tiene porque existir.

Nota 1.4.7. *$\overline{\lim_n} E_n$ y $\underline{\lim_n} E_n$ no varían si omitimos un número finito de miembros de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Proposición 1.4.8. *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, donde S es un $\sigma-$anillo de conjuntos en X. Entonces $\overline{\lim_n} E_n$ y $\underline{\lim_n} E_n$ están en S. Si μ es una medida en S, se tiene:*

1. $\mu\left(\underline{\lim_n} E_n\right) \leq \underline{\lim_n} \mu(E_n)$.
2. $\mu\left(\overline{\lim_n} E_n\right) \geq \overline{\lim_n} \mu(E_n)$, *cuando* $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) < \infty$ *para algún* n.

Demostración.

1. Sea $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, $n \in \mathbb{N}$.

   Entonces $\underline{\lim_n} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \uparrow$ y $F_n \in S$. Por el lema 1.2.19, se tiene que

   $$\mu\left(\underline{\lim_n} E_n\right) = \lim_n \mu(F_n) = \underline{\lim_n} \mu(F_n) \leq \underline{\lim_n} \mu(E_n).$$

2. Sea $G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, $n \in N$.

   Entonces $\overline{\lim_n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, $G_n \downarrow$ y $G_n \in S$. Por hipótesis, $\mu(G_m) < \infty$ para algún m. Luego, por el Lema 1.2.20, tenemos que

   $$\mu\left(\overline{\lim_n} E_n\right) = \lim_n \mu(G_n) = \overline{\lim_n} \mu(G_n) \geq \overline{\lim_n} \mu(E_n).$$

□

Contra-Ejemplo 1.4.9. *El contra-ejemplo 1.2.22 sirve para mostrar que la hipótesis $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) < \infty$ para algún n, no se puede omitir en 2 de la Proposición 1.4.8.*

El teorema siguiente muestra que una medida finita, definida en un σ-anillo, es siempre acotada. Esto no es cierto para los anillos, como veremos en el contra-ejemplo 1.4.12.

Teorema 1.4.10. *Sea $\mu : S \to [0, \infty)$ una medida (finita) en un σ-anillo S de conjuntos en X. Entonces $\sup_{E \in S} \mu(E) < \infty$. Es decir, μ es acotada en S.*

Demostración. Sea $\sup_{E \in S} \mu(E) = \alpha$ (α puede ser ∞).

Entonces existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $\alpha = \lim_{n} \mu(E_n)$.

Sea $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Como S es un $\sigma-$anillo, $E_0 \in S$ y $\mu(E_0) \geq \mu(E_n)$ por ser μ monótona (ver 1.2.16). Por lo tanto, $\mu(E_0) \geq \alpha$.

Como $E_0 \in S$, entonces $\mu(E_0) \leq \alpha$, y así $\mu(E_0) = \alpha$. Pero, por hipótesis, μ es finita, y por tanto, α es finito. $\square$

Nota 1.4.11. *A la luz de la nota 1.2.17, el teorema anterior es evidentemente cierto si $\mu : S \to [0, \infty)$ es sólo finitamente aditiva (finita) y S es un $\sigma-$anillo.*

Contra-Ejemplo 1.4.12. *Sea R el anillo de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Si $\mu : R \to [0, \infty)$ es la medida de conteo restringida a R, entonces μ es una medida finita en R y $\sup_{E \in R} \mu(E) \geq \sup_{n} \{\mu(E) : E = \{1, 2, \ldots, n\}\} = \infty$.*

Dada una familia de medidas $(\mu_d)_{d \in I}$ en un anillo de conjuntos R, bajo ciertas condiciones, podemos generar una nueva medida. Para ver esto, damos las siguientes definiciones y un lema.

Definición 1.4.13. *Sean D un conjunto no vacío y $\geq$ una relación en D tal que $\geq$ es reflexiva y transitiva.*

1. *Decimos que $(D, \geq)$es* un conjunto dirigido *si además se cumple que, dados a, b en D, existe un elemento $c \in D$ tal que $c \geq a$ y $c \geq b$.*

2. *Sea $t : (D, \geq) \to X$ una función dada por $t(\alpha) = t_\alpha \in X$ para todo $\alpha \in D$, donde $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido. Entonces $(t_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ se llama* una red en X dirigida por $(D, \geq)$. *A $(t_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ también denotamos por $(t_\alpha)_{\alpha \in D}$.*

   Se llama una red no decreciente *(respectivamente,* no creciente*) si $t_\alpha \geq t_\beta$ (respectivamente, $t_\beta \geq t_\alpha$) siempre que $\alpha \geq \beta$ en $(D, \geq)$.*

Si $(t_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ es una red no decreciente (respectivamente, no creciente) de números reales extendidos no negativos, entonces $t = \sup_{\alpha \in D} t_\alpha \in [0, \infty]$ (respectivamente, $t = \inf_{\alpha \in D} t_\alpha \in [0, \infty]$). En tal caso, escribimos $t_\alpha \uparrow t$ (respectivamente, $t_\alpha \downarrow t$).

Ejemplo 1.4.14.

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty, \infty]$ es una red dirigida por $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden natural de $\mathbb{N}$.*

2. *Sea S un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Sea $C^r(S)$ la colección de todas las funciones reales y continuas en S.*

   En $C^r(S)$ introducimos la relación $\geq$ dada por:

   $$f \geq g \text{ si } f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in S,\ f, g \in C^r(s).$$

   Dadas f_1, f_2 en $C^r(S)$ la función $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ está en $C^r(S)$. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in S$, existen vecindades V_1 y V_2 de x_0 tales que

   $$f_i(V_i) \subset (f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

   Si $V = V_1 \cap V_2$, entonces V es una vecindad de x_0 y $g(x) \in (g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$ para todo $x \in V$. Así, g es continua en x_0. Como x_0 es arbitrario en S, se tiene que $g \in C^r(s)$.

   Evidentemente, $g \geq f_1$ y $g \geq f_2$. Por lo tanto, $(C^r(S), \geq)$ es un conjunto dirigido.

   Sea x_0 fijo en S. Entonces, $(t_f)_{f \in (C^r(S), \geq)}$ es una red real no decreciente, donde $t_f = f(x_0)$.

3. *Sea x_0 fijo en S, donde S es como en 2. Sea $f \geq g$ si $f(x_0) \geq g(x_0)$ para $f, g \in C^r(s)$. $(C^r(S), \geq)$ es un conjunto dirigido.*

Lema 1.4.15. *Si $t_\alpha \uparrow t$ y $s_\alpha \uparrow s$, donde (t_α) y (s_α) son redes no decrecientes en $[0, \infty]$, dirigidas por el mismo conjunto dirigido $(D, \leq)$, entonces $(t_\alpha + s_\alpha) \uparrow (t + s)$.*

Demostración. Si $\alpha > \beta$, $t_\alpha + s_\alpha \geq t_\beta + s_\beta$ y así, $(t_\alpha + s_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ es una red no decreciente en $[0, \infty)$.

Además, $t_\alpha + s_\alpha \leq t + s$ para todo α y por lo tanto, si $u = \sup\limits_{\alpha}(t_\alpha + s_\alpha)$, tenemos que $u \leq t + s$.

Sean $\alpha, \beta \in D$. Si $r \geq \alpha$, $r \geq \beta$, entonces $t_\beta + s_\beta \leq t_r + s_r \leq u$.

Si $s_\beta = \infty$ para algún $\beta \in D$, entonces $u = \infty$ y así, $u = t + s = \infty$.

Si $s_\beta < \infty$ para todo $\beta \in D$, tenemos que $t_\alpha \leq u - s_\beta$, para todo $\alpha \in D$, lo cual implica que $t \leq u - s_\beta$ ó $t + s_\beta \leq u$. Como β es arbitrario en D, concluimos que $t + s \leq u$.

Esto demuestra que $u = s + t$. $\square$

Teorema 1.4.16. *Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha \in (D, \geq)}$ una red no decreciente de medidas en un anillo R de conjuntos en X (esto es, $\alpha \geq \beta$ implica que $\mu_\alpha(E) \geq \mu_\beta(E)$ para todo $E \in R$).*

La función de conjuntos μ, definida en R por

$$\mu(E) = \sup_{\alpha \in (D,\geq)} \mu_\alpha(E), \quad E \in R,$$

es una medida en R. (Notación: $\mu = \sup\limits_\alpha \mu_\alpha$).

Luego, $\mu(E) = \lim\limits_\alpha \mu_\alpha(E)$ en el sentido de que, dado $c < \mu(E)$, existe $\alpha_0 \in (D, \geq)$ tal que $\mu_\alpha(E) > c$ para $\alpha > \alpha_0$.

Demostración. Es evidente que $\mu(\emptyset) = 0$.

Si $E, F \in R$ con $E \cap F = \emptyset$, entonces, por el Lema 1.4.15, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(E \cup F) &= \sup_\alpha \mu_\alpha(E \cup F) = \sup_\alpha \{\mu_\alpha(E) + \mu_\alpha(F)\} = \sup_\alpha \mu_\alpha(E) + \sup_\alpha \mu_\alpha(F) \\ &= \mu(E) + \mu(F).\end{aligned}$$

Haciendo inducción finita, se sigue que μ es finitamente aditiva en R.

Si $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset R$ con $E = \bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i \in R$, y $E_i \uparrow$ entonces como μ es monótona, obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_n \mu(E_n) &= \lim_n \sup_\alpha \mu_\alpha(E_n) = \sup_n \sup_\alpha \mu_\alpha(E_n) = \sup_\alpha \sup_n \mu_\alpha(E_n) = \sup_\alpha \mu_\alpha(E) \\ &= \mu(E).\end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 1.2.21, concluimos que μ es una medida en R. □

En el Teorema 1.4.16 no podemos eliminar la hipótesis de que $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in (D,\geq)}$ es no decreciente como veremos en el siguiente Contra-Ejemplo.

Contra-Ejemplo 1.4.17. *Sea $S = P(\mathbb{N})$.*

Tomemos $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ en $(0,1)$ tal que $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n < \infty$ (por ejemplo, podemos tomar $\lambda_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$).

Para cada $p \in \mathbb{N}$, sea

$$\lambda_n^{(p)} = \begin{cases} \lambda_n, & si\ 1 \leq n \leq p; \\ 1, & si\ n > p. \end{cases}$$

Definamos $\mu_p : S \to [0, \infty]$ por

$$\mu_p(E) = \begin{cases} 0, & si\ E = \emptyset; \\ \sum\limits_{n \in E} \lambda_n^p, & si\ E \in S, E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. *μ_p es una medida en S.*

2. *Si $\mu : S \to [0,\infty]$ se da por*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \textit{si } E = \emptyset; \\ \sum\limits_{i\in E} \lambda_i, & \textit{si } E \textit{ es finito y } E \neq \emptyset; \\ \infty & \textit{si } E \textit{ es infinito.} \end{cases}$$

   entonces μ es finitamente aditiva, pero no es numerablemente aditiva.

3. *$\mu_1(E) \geq \mu_2(E) \geq \cdots \geq \mu(E)$ y $\lim\limits_n \mu_n(E) = \mu(E)$ para todo $E \in S$, pero μ no es una medida en S.*

Discusión.

1. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Si $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces $E \in S$.

   Si $E = \emptyset$, nada hay que probar.

   Sea $E \neq \emptyset$. Como los $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son mutuamente disjuntos, evidentemente,

$$\mu_p(E) = \sum_{n\in E} \lambda_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n\in E_i} \lambda_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_p(E_i).$$

2. Ver el Contra-Ejemplo 1.2.23.

3. Si E es infinito, es obvio que $\mu_p(E) = \infty$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y así, $\mu_p(E) = \mu(E) = \infty$.

   Ahora, sea E finito. Supóngase que $E = \{n_1, \ldots, n_k\}$ con $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Entonces, si $n > n_k$,

$$\mu_n(E) = \lambda_{n_1}^{(n)} + \cdots + \lambda_{n_k}^{(n)} = \lambda_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_k}.$$

   Por lo tanto, $\mu_{n_k}(E) = \mu_{n_k+1}(E) = \cdots = \mu_{n_k+r}(E) = \ldots$. Por la definición de μ_p, se ve que $\mu_1(E) \geq \cdots \geq \mu_{n_k}(E)$. Asi, $\mu_n(E) \downarrow$ para todo $E \in S$.

   Por último, $\mu(E) = \sum\limits_{i\in E} \lambda_i = \sum\limits_{j=i}^{k} \lambda_{n_j} = \mu_n(E)$ para todo $n \geq n_k$ y en consecuencia, $\mu(E) = \lim\limits_n \mu_n(E)$, $E \in S$.

Nota 1.4.18. *Si $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas finitas en un σ-anillo S y $\lim\limits_n \mu_n(E) = \mu(E) \in [0,\infty)$ para todo $E \in S$, entonces μ es una medida en S. Este es el* Teorema de Nikodym.

Nótese que en el contra-ejemplo 1.4.17, las medidas μ_n no son finitas y así, no cumplen *la hipótesis de dicho teorema.*

Ahora introducimos el concepto de clases monótonas y demostramos que una clase monótona, si es además un anillo, es necesariamente un σ-anillo. Otros resultados sobre estas clases serán discutidos en la sección 5.

Definición 1.4.19. *Una colección no vacía M de conjuntos en X se llamará una* clase monótona, *si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Dada una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de miembros de M, entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_n E_n \in M.$$

2. *Dada una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ no creciente de miembros de M, entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_n E_n \in M.$$

Las condiciones 1 y 2 se pueden resumir en el siguiente enunciado: Para cada sucesión monótona $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ se tiene que $\lim_n E_n \in M$.

Ejemplo 1.4.20.

1. *Un σ-anillo de conjuntos en X es una clase monótona, ya que S es cerrado por unión e intersección numerables de sus miembros, por la definición 1.4.1 y por la proposición 1.4.3,respectivamente.*

2. *Sea X un conjunto no vacío. Sea $M = \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, donde $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n$. Entonces M es una clase monótona; pero en general, no es un anillo.*

3. *Sean μ_1 y μ_2 dos medidas finitas en un σ-anillo S. Entonces*

$$M = \{E \in S : \mu_1(E) \leq \mu_2(E)\}$$

es una clase monótona, ya que $\emptyset \in M$ y $\mu_i\left(\lim_n E_n\right) = \lim_n \mu_i(E_n)$, $i = 1, 2$; para sucesiones monótonas $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M, por los lemas 1.2.19 y 1.2.20.

Teorema 1.4.21. *Un σ-anillo es una clase monótona. Si una clase monótona M es un anillo, entonces M es un σ-anillo.*

Demostración. La primera afirmación se sigue de 1 en el ejemplo 1.4.20.

Supóngase ahora que M es un anillo que a la vez es una clase monótona.

Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$, entonces $F_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M$ y $F_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Como M es una clase monótona, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$. Por lo tanto, M es un σ-anillo. $\square$

Ahora extendemos la definición 1.2.5 para los σ-anillos, álgebras, σ-álgebras y clases monótonas.

Definición 1.4.22. *El σ-anillo* generado *(respectivamente, la σ-álgebra, el álgebra, la clase monótona* generada*) por una clase no vacía C de conjuntos en X es el σ-anillo (respectivamente, la σ-álgebra, el álgebra, la clase monótona) de conjuntos en X más pequeño(a) que contiene a C.*

Proposición 1.4.23. *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de σ-anillos (respectivamente σ-álgebras, álgebras, clases monótonas) de conjuntos en X. Entonces*

$$S = \bigcap_{\mathrm{E} \in \mathcal{F}} \mathrm{E} = \{E : E \in \mathrm{E},\ \textit{para todo}\ \mathrm{E} \in \mathcal{F}\}$$

es un σ-anillo (respectivamente, una $\sigma-$álgebra, un álgebra, una clase monótona), si S es no vacía.

Demostración. La fácil verificación se deja al lector. $\square$

Como $\mathcal{P}(X)$ es una $\sigma-$álgebra en X, evidentemente $\mathcal{P}(X)$, a la vez, es un σ-anillo (respectivamente, un álgebra, una clase monótona). Por lo tanto, dada una clase no vacía C de conjuntos en X, entonces la familia $\mathcal{F}$ de todos los σ-anillos (respectivamente, todas las σ-álgebras, todas las álgebras, todas las clases monótonas) en X que contienen a C es no vacía y luego por 1.4.23, $\bigcap_{E \in \mathcal{F}} E$ es el σ-anillo (respectivamente, la σ-álgebra, la álgebra, la clase monótona) generado(a) por C.

Notación: Sea C una clase no vacía de conjuntos en X. El σ-anillo (respectivamente, la σ-álgebra, el álgebra, la clase monótona) generado(a) por C en X se denota por $S(C)$ (respectivamente, $A_\sigma(C)$, $A(C)$, $M(C)$).

1.5. Anillos, σ-Anillos y Clases Monótonas Generados

En esta sección explicamos la construcción del anillo $R(C)$ y del σ-anillo $S(C)$ generados por una clase no vacía C de conjuntos en X. Para la construcción de $S(C)$ utilizamos algunas propiedades de los números ordinales y algunos argumentos de inducción transfinita. En varias situaciones en el desarrollo del texto aplicamos el axioma de elección o uno de sus equivalentes, como el Lema de Zorn. Por tales razones, en la primera parte de la presente sección hacemos un estudio detallado sobre:

1. La equivalencia entre el Axioma de Elección, el Lema de Tukey, El principio maximal de Hausdorff, el Lema de Zorn y el Teorema de buen ordenamiento.
2. Números ordinales.
3. Teoremas de inducción transfinita y de recursión transfinita.

También presentamos un teorema de gran utilidad que relaciona el σ-anillo y la clase monótona generados por un anillo de conjuntos en X, el cual aplicamos para estudiar la unicidad de medidas en espacios topológicos bajo ciertas condiciones.

Definición 1.5.1. *Sea P un conjunto.*

Una relación "$\leq$" definida en P se llama un orden parcial *en P si*

1. *Es reflexiva.*
2. *Es anti-simétrica (es decir, $x \leq y$ e $y \leq x$ implican que $x = y$).*
3. *Es transitiva.*

Si "$\leq$" es un orden parcial en P, entonces $(P, \leq)$ se llama un conjunto parcialmente ordenado.

Si el orden parcial "$\leq$" también verifica que, dados $x, y \in P$, entonces

$$x \leq y \quad \text{ó} \quad y \leq x \text{ (tricotomía)},$$

"$\leq$" se llama un orden lineal total o complejo *en P y en este caso $(P, \leq)$ se llama un conjunto* linealmente, totalmente o completamente ordenado.

Definición 1.5.2. *Si $A \subset P$, $(P, \leq)$ parcialmente ordenado.*

$u \in P$ se llama una cota superior *de A si $x \leq u$ para todo $x \in A$.*

Un elemento $m \in P$ se llama maximal *en P si*

$$m \leq x \text{ y } x \in P \text{ implican que } x = m.$$

Asimismo, se definen una cota inferior *de A y un* elemento minimal *de P.*

Un subconjunto C de P se llama una cadena *en P si C es linealmente ordenado en $\leq$.*

Ejemplo 1.5.3.

1. *En $P(X)$, la relación $\leq$ dada por: $A \leq B$ si $A \subset B$, es un orden parcial.*

   Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$. Entonces $C = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \ldots\}$ es una cadena en $(P(X), \leq)$.

2. *Sea $F = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ una función}\}$. Decimos que $f \leq g$ en F si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

*(*NOTA: *En el Ejemplo 3 de 1.4.14, $(C^r(s), \leq)$ no es parcialmente ordenado).*

3. *Sea $F = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$. Ordenamos F por inclusión de conjuntos como en 1. $\{1\}, \{2\}$ son elementos minimales y $\{2,3,4\}, \{1,2,3\}$ son elementos maximales en $\{F, \subset\}$. Por lo tanto, elementos maximales y minimales, en general, no son únicos.*

Definición 1.5.4. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos en X. $\mathcal{F}$ se llama una* familia de carácter finito *si para cada $A \subset X$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A está en $\mathcal{F}$.*

Lema 1.5.5. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos en X, de carácter finito. Si C $(\neq \emptyset)$ es una cadena en F con respecto a la relación de inclusión de conjuntos, entonces $\bigcup\limits_{C \in \mathbb{C}} C \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $F = \bigcup\limits_{C \in \mathbb{C}} C$. Por la hipótesis sobre $\mathcal{F}$, basta probar que cada subconjunto finito de F está en $\mathcal{F}$.

Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset F$. Entonces existen $C_i \in \mathbb{C}$ tales que $x_i \in C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Como C es una cadena, uno de los C_i contiene a los demás. Sin perder la generalidad, si suponemos que $C_i \subset C_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $A \subset C_n \in \mathbb{C}$. Como A es finito y $\mathcal{F}$ es de carácter finito, A está en F. $\square$

Teorema 1.5.6. *Los siguientes axiomas de la teoría de conjuntos son equivalentes entre sí:*

1. a) **El Axioma de elección.** *Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X, disjuntos dos a dos. Entonces existe una función $f : I \to \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in I$, $f(\alpha) \in A_\alpha$.*

   La función f se llama una función de elección *para la familia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$.*

   b) **Versión alternativa del axioma de elección.** *Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. El* producto cartesiano *de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ es la colección de todas las funciones x con dominio I tal que $x_\alpha = x(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.*

   El producto cartesiano de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ se denota por $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Para $x \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, $x(\alpha) = x_\alpha$ se llama la α-ésima coordenada *de x.*

   La versión alternativa del axioma de elección *dice que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío. Es decir, si $I \neq \emptyset$ y si cada $X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset$.*

2. **Lema de Tukey.** *Sea F una familia no vacía de conjuntos en X, parcialmente ordenada por la relación de inclusión de conjuntos. Si F es de carácter finito, entonces F tiene un miembro maximal.*

3. **Principio maximal de Hausdorff.** *Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene a una cadena maximal.*

4. **Lema de Zorn.** *Existe un elemento maximal en cada conjunto P no vacío y parcialmente ordenado, en el cual cada cadena tiene una cota superior en P.*

5. **Teorema del buen ordenamiento.** *Cada conjunto P no vacío admite un* buen orden *"$<$" en el sentido de que "$<$" es un orden lineal en P tal que cada $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, contiene un elemento a de tal modo que $a < x$ para todo $x \in A$.*

   Cuando "$<$" es un buen orden en P, decimos que P está bien ordenado por "$<$", ó que $(P, <)$ está bien ordenado.

Demostración.

1. a) ⇒ 1. b): Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos.

Para cada $\alpha \in I$, sean $A_\alpha = X_\alpha \times \{\alpha\}$ y $X = \left(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \times I$.

Entonces $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ es, evidentemente, una colección no vacía de subconjuntos no vacíos y mutuamente disjuntos de X. Por *1. a)*, existe una función de elección $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ tal que $f(\alpha) = (x_\alpha, \alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, donde $x_\alpha \in X_\alpha$.

Si definimos $\phi(\alpha) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\phi \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, lo cual demuestra 1.$b$).

1. b) ⇒ 1. a): En efecto, tómese $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, donde $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y mutuamente disjuntos.

1. b) ⇒ 2.: En efecto, supongamos lo contrario. Esto es, existe una familia no vacía $\mathcal{F}$ de conjuntos con carácter finito, sin ningún miembro maximal (por la relación de inclusión de conjuntos).

Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea $A_F = \{E \in \mathcal{F} : F \subsetneq E\}$.

Por hipótesis, $A_F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

Por *1. b)* existe una función f en F tal que para cada $F \in F$, $f(F) \in A_F$. Por lo tanto, $F \subsetneq f(F) \in \mathcal{F}$, para cada $F \in \mathcal{F}$.

Una sub-familia $I \subset \mathcal{F}$ se llama *f-inductiva* o inductiva con respecto a la función f sobre I, si se cumplen las siguientes propiedades:

(a.fi) $\emptyset \in I$.

(b.fi) $A \in I$ implica que $f(A) \in I$.

(c.fi) Si $\mathcal{C}$ es una cadena contenida en I, entonces $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in I$.

Afirmamos que $\mathcal{F}$ es f-inductiva. En efecto, como $\emptyset$ es finito, $\mathcal{F}$ es de carácter finito y $\mathcal{F}$ es no vacío, se tiene que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Para todo $F \in \mathcal{F}$, $f(F) \in A_F$ y por lo tanto $f(F) \in \mathcal{F}$.

Por el Lema 1.5.5, $\mathcal{F}$ cumple la propiedad (c.fi).

Así, $\mathcal{F}$ es $f-$inductiva.

Sea
$$I_0 = \bigcap \{I : I \text{ es } f\text{-inductiva}\}.$$

Como $\mathcal{F}$ es f-inductiva, I_0 está bien definida.

Las propiedades (a.fi) y (b.fi) de la definición de familia $f-$inductiva se verifican fácilmente para I_0.

Ahora, si $\mathcal{C}$ una cadena en I_0. Entonces $\mathcal{C} \subset I$, para toda I f-inductiva y por lo tanto, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ pertenece a toda I f-inductiva, lo cual implica que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in I_0$.

Así, I_0 es $f-$inductiva.

Evidentemente, I_0 es la familia f-inductiva más pequeña contenida en $\mathcal{F}$. Luego, cualquier familia f-inductiva J más pequeña que I_0, coincide con I_0.

Sea
$$H = \{A \in I_0 : B \in I_0 \text{ y } B \subsetneq A \text{ implican que } f(B) \subset A\}.$$

Como $\emptyset$ no contiene a ningún sub-conjunto propio, se tiene que $\emptyset \in H$ y así, $H \neq \emptyset$.

Afirmación 1: Si $A \in H$ y si $C \in I_0$, entonces $C \subset A$ ó $f(A) \subset C$.

En efecto, sea
$$G_A = \{C \in I_0 : C \subset A \text{ o } f(A) \subset C\}.$$

Basta probar que $G_A = I_0$.

Como I_0 es la familia f-inductiva más pequeña, es suficiente probar que G_A es f-inductiva.

Se ve que $\emptyset \in G_A$.

Si $C \in G_A$, entonces $C \subsetneq A$ o $C = A$ ó $f(A) \subset C$.

Si $C \subsetneq A$, como $A \in H$, se tiene que $f(C) \subset A$. Por (b.fi) de la definición de familias f-inductivas, $f(C) \in I_0$. Luego, $f(C) \in G_A$.

Si $C = A$, entonces $f(C) \supset f(A)$ y así, $f(C) \in G_A$.

Si $f(A) \subset C$, entonces $f(A) \subset f(C)$, pues $C \subsetneq f(C)$ y así, $f(C) \in G_A$. Esto es, G_A cumple la propiedad (b.fi) de la definición de familias f-inductivas.

Por último, sea $\mathcal{C}$ una cadena en G_A.

Si cada $C \in \mathcal{C}$ es tal que $C \subset A$, entonces $\bigcup\limits_{C \in \mathbb{C}} C \supset A$ y así, $\bigcup\limits_{C \in \mathbb{C}} C \in G_A$.

Si existe algún $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(A) \subset C_0$, entonces $f(A) \subset \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in G_A$.

Así, G_A es f-inductiva y en consecuencia, $G_A = I_0$, lo que demuestra la afirmación 1.

Afirmación 2: $H = I_0$.

En efecto, basta probar que H es f-inductiva.

Como vimos anteriormente, $H \neq \emptyset$ y $\emptyset \in H$.

Sea $A \in H$. Veamos que $f(A) \in H$.

Supóngase que existe $B \in I_0$ tal que $B \subsetneq f(A)$. Ya que $B \in I_0 = G_A$, tenemos que $B \subset A$ ó $f(A) \subset B$. Como $B \subsetneq f(A)$, la única posibilidad es la de que $B \subset A$.

Si $B \subsetneq A$, por la definición de H, tenemos que $f(B) \subset A$ y así,

$$f(B) \subset A \subsetneq f(A).$$

Si $B = A$, $f(B) \subset f(A)$. Por lo tanto, $f(A) \in H$.

Sean $\mathcal{C}$ una cadena en H y $E \in I_0$ tal que $E \subsetneq \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$.

Ya que $E \in I_0 = G_C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, tenemos que $E \subset C$ para algún $C_0 \in \mathcal{C}$ ó $f(C) \subset E$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

En la segunda alternativa, tendremos que

$$E \subsetneq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset \bigcup \{f(C) : C \in \mathcal{C}\} \subset E,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe algún $C_0 \in \mathbb{C}$ tal que $E \subset C_0$.

Si $E \subsetneq C_0$, entonces $f(E) \subsetneq C_0 \subset \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$, pues $C_0 \in H$.

Si $E = C_0$, como $C_0 \in H$ y $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in I_0 = G_{C_0}$, tenemos que

$$f(E) \subset f(C_0) \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \quad \text{ó} \quad \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset C_0.$$

La última relación es posible si, y sólo si, $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C = C_0$. En consecuencia, $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C \in H$.

Por lo tanto, H es f-inductiva y luego, $H = I_0$.

Afirmación 3: I_0 es una cadena.

En efecto, sean $A, B \in I_0$. Por las afirmaciones 1 y 2, $I_0 = H = G_A$. Por lo tanto, podemos considerar que $A \in H$ y $B \in G_A$.

Entonces $B \subset A$ ó $f(A) \subset B$.

Pero $A \subsetneq f(A)$ y por lo tanto, en el segundo caso, tenemos que

$$A \subsetneq f(A) \subset B$$

y así, $A \subset B$.

Es decir, $A \subset B$ ó $B \subset A$ y así, I_0 es una cadena.

Sea $M = \cup\{F : F \in I_0\}$. Como I_0 es f-inductiva y es una cadena (por la afirmación 3), se tiene que $M \in I_0$ y $f(M) \in I_0$. Pero $M \subsetneq f(M) \in I_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, *1. b)* $\Rightarrow$ *2.*

2. $\Rightarrow$ ***3.:*** Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y no vacío.

Si

$$C = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ una cadena de miembros de } P\},$$

entonces C es no vacía, ya que podemos tomar $\mathcal{F}$ como la cadena que consta de un elemento de P.

C es de carácter finito. En efecto, sean $\mathcal{F} \in C$, y $G \subset \mathcal{F}$, G finito. Entonces, G es una cadena en P y por lo tanto $G \in C$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es una colección de miembros de P tal que cada subconjunto finito de $\mathcal{F}$ es una cadena en P, entonces, $\mathcal{F}$ mismo es una cadena en P, ya que si $x, y \in \mathcal{F}$, $\{x, y\}$ es una cadena en P y así, $x \leq y$ ó $y \leq x$. Como C es de carácter finito, por *2* existe un miembro M maximal en C, lo cual implica que M es una cadena maximal en $(P, \leq)$.

3. $\Rightarrow$ ***4.:*** Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y no vacío. Supóngase que en P cada cadena tiene una cota superior (perteneciente a P).

Por *3*, existe una cadena maximal M en P.

Sea m una cota superior de M. Entonces m es maximal en P, ya que en caso contrario, existiría $x \in P$ tal que $m \leq x$ y $m \neq x$. Obviamente $M \cup \{x\}$ es una cadena en P, que contiene a M estrictamente, y esto es una contradicción con la maximalidad de la cadena M.

Esta contradicción establece que *3* implica *4*.

4. $\Rightarrow$ ***5.:*** Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ la familia de todos los conjuntos bien ordenados $(W, \leq)$ con $W \subset X$.

Como $\{x\} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in X$, $F \neq \emptyset$.

Introducimos un orden parcial $\leq$ en $\mathcal{F}$ como sigue:

$(W_1, \leq_1) \leq (W_2, \leq_2)$ si $W_1 = W_2$ y $\leq_1 = \leq_2$
ó
existe un elemento $a \in W_2$ tal que $W_1 = \{x \in W_2 : x \leq_2 a, x \neq a\}$ y de manera que $\leq_2$ coincide con $\leq_1$ en W_1. *En este caso, decimos que* $(W_2, \leq_2)$ *es una continuación de* $(W_1, \leq_1)$.

Evidentemente, $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{F}$.

Para aplicar el Lema de Zorn (*4*) a $(\mathcal{F}, \leq)$, consideremos una cadena $C = \{(W_1, \leq_i)\}_{i \in I}$ no vacía en $(\mathcal{F}, \leq)$ y sea $W = \bigcup_{i \in I} W_i$.

Sea $\leq = \leq_i$ en W_i, $i \in I$.

Por la definición de $\leq$ en $\mathcal{F}$ y por la hipótesis de que C es una cadena en $\mathcal{F}$, se tiene que $\leq$ es un orden parcial bien definido en W.

Dados $x, y \in W$, existe un $i \in I$ tal que $x, y \in W_i$, y así, $x \leq_i y$ ó $y \leq_i x$, lo cual implica que $x \leq y$ ó $y \leq x$, respectivamente.

Por lo tanto, $(W, \leq)$ es linealmente ordenado.

Ahora, probaremos que $(W, \leq)$ está bien ordenado.

Sea $\emptyset \neq A \subset W$. Entonces existe algún $i \in I$ tal que $A \cap W \neq \emptyset$. Puesto que $(W_i, \leq_i)$ está bien ordenado, existe un elemento $a \in A \cap W_i$ tal que $a \leq_i x$ para todo $x \in A \cap W_i$.

Afirmación: $a \leq b$ para todo $b \in A$.

En efecto, dado $b \in A$, existe algún $j \in I$ tal que $b \in W_j$. Entonces,

$$W_i \leq W_j \quad \text{ó} \quad W_j \leq W_i.$$

Si $W_j \leq W_i$ ó $b \in W_i$, se tiene que $a \leq_i b$.

Si $b \notin W_i$, entonces, por la definición de $\leq$, se tiene que $x \leq_j b$ para todo $x \in W_i$ y así, en particular, $a \leq_j b$.

En cualquier caso, $a \leq b$.

En consecuencia, dado $A \neq \emptyset$, $A \subset W$; existe un $a \in A$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$. Por lo tanto, $(W, \leq)$ está bien ordenado y así, $(W, \leq) \in \mathcal{F}$.

Es obvio que $(W, \leq)$ es una cota superior de C.

Ahora, por *4*, existe un elemento maximal $(W_0, \leq_0)$ en $\mathcal{F}$.

Si $W_0 = X$, entonces $(X, \leq_0)$ está bien ordenado.

Si $W_0 \neq X$. Sea $z \in X \setminus W_0$. Definamos $<'$ en $W \cup \{z\}$ como sigue:

- $\forall x, y \in W_0 : x <' y$ si $x <_0 y$ y $y <' x$ si $y <_0 x$;
- $x <' z$, $\forall x \in W_0$.
- $z <' z$.

Entonces $(W_0 \cup \{z\}, <')$ está bien ordenado y, por lo tanto, pertenece a $\mathcal{F}$.

Pero $(W_0, <_0) \leq (W_0 \cup \{z\}, <')$ y $(W_0, <_0) \neq (W_0 \cup \{z\}, <')$, lo cual contradice la maximalidad de $(W_0, <_0)$ en $\mathcal{F}$. Esta contradicción demuestra que $W_0 = X$.

Por lo tanto, $(X, <_0)$ está bien ordenado por el orden $<_0$.

5. $\Rightarrow$ ***1. b):*** En efecto, sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Sea $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Por *5.*, existe un buen orden $<$ en X.

Para cada $\alpha \in I$, sea $f(x) = x_\alpha$, el elemento más pequeño en X_α respecto al orden $<$. Esto es posible ya que $(X, <)$ está bien ordenado.

Entonces f es una función en I tal que $f(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ y así, $f \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Es decir, *1. b)* es cierto.

Esto completa la demostración del teorema.

$\square$

Queremos hacer notar que el axioma de elección o uno de sus equivalentes será usado en diversas situaciones en el desarrollo de este libro.

Ahora, queremos ilustrar el concepto de buen orden y luego hacer un estudio detallado sobre los números ordinales y la recursión transfinita.

$\mathbb{N}$ es un ejemplo de un conjunto bien ordenado en el orden natural.

$\mathbb{Q}^+ = \{x : x \geq 0, x \in \mathbb{Q}\}$ es linealmente ordenado con respecto al orden natural. Como $\{x : x \in \mathbb{Q}^+, x > 0\}$ no tiene el menor elemento en el orden natural, $\mathbb{Q}^+$ no está bien ordenado en este orden. Pero, por el Teorema de buen ordenamiento (por supuesto, un axioma), $\mathbb{Q}^+$ se puede ordenar bien con respecto a algún orden lineal.

Definición 1.5.7. *Sean* $(A, <_1)$, $(B, <_2)$ *dos conjuntos linealmente ordenados. Si existe una función* $f : A \to B$ *tal que* f *es biyectiva y preserva el orden en el sentido de que*

$$f(x) <_2 f(y) \text{ en } B \text{ siempre que } x <_1 y \text{ en } A,$$

entonces decimos que $(A, <_1)$ *y* $(B, <_2)$ *son del* mismo tipo de orden *y lo escribimos en símbolos como* $(A, <_1) \approx (B, <_2)$. *En tal caso, también decimos que* $(A, <_1)$ *y* $(B, <_2)$ *son* isomorfos de orden *y que* f *es un* isomorfismo de orden *con dominio* A *y rango* B.

Es inmediato que $\approx$ es una relación de equivalencia en una colección no vacía de conjuntos linealmente ordenados (respectivamente, bien ordenados).

Definición 1.5.8. *Sean* $(A, <)$ *un conjunto bien ordenado y* $\mathcal{F}$ *una colección de conjuntos bien ordenados a la cual pertenece* $(A, <)$ *como un miembro. Entonces la clase de equivalencia en* $\mathcal{F}$ *determinada por* $\approx$*, que contiene* $(A, <)$*, se llama* el tipo de orden A*, y se denota por* $Ord\, A$*. Se dice que* $Ord\ A$ *es un* número ordinal.

El número ordinal $Ord\, A$ está bien definido, siendo independiente de la colección F de conjuntos bien ordenados, a la cual $(A, <)$ pertenezca.

Ejemplo 1.5.9. *Damos el orden natural a cada uno de los siguientes sub-conjuntos de* $\mathbb{N}$*:*

$$\emptyset, \{0\}, \{0,\ 1\}, \ldots, \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \ldots, \mathbb{N}.$$

Entonces llamemos

$$Ord\,\emptyset = 0, Ord\,\{0\} = 1, Ord\,\{0, 1\} = 2, \ldots,$$
$$Ord\,\{0, 1, 2, \ldots, n\} = n + 1, \ldots, Ord\,\mathbb{N} = \omega.$$

y definamos

$$Ord\,\{1, 2, \ldots, \omega\} = \omega + 1,\ Ord\,\{1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\} = \omega + 2, \ldots,$$
$$Ord\,\{1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\} = \omega^2, \ldots$$

Para un estudio de la aritmética de números ordinales ver las páginas 81-85 de Halmos [14].

Definición 1.5.10. *Sea $(A, \leq')$ un conjunto no vacío linealmente ordenado. Si $x \in A$, el subconjunto $A_x = \{y \in A : y \leq' x, y \neq x\}$ se llama el* segmento inicial *determinado por x.*

Si α y β son dos números ordinales y $(A, <_1)$, $(B, <_2)$ son conjuntos bien ordenados con $Ord\, A = \alpha$, $Ord\, B = \beta$, entonces se dice que $\alpha < \beta$ si existe un $b \in B$ tal que $A \approx B_b$.

Se escribe que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha < \beta$, ó $\alpha = \beta$ (este es el caso en que $A \approx B$).

Como "$\leq$" en la definición 1.5.10 es independiente de los conjuntos $(A, <_1)$ y $(B, <_2)$ empleados, "$\leq$" está bien definida. Con el fin de demostrar que "$\leq$" es un orden lineal en una colección de números ordinales damos el siguiente lema

Lema 1.5.11. *Sean $(A, <_1)$ y $(B, <_2)$ conjuntos bien ordenados y no vacíos.*

1. *Si $f : A \to A$ es inyectiva y preserva el orden, entonces $x <_1 f(x)$, $x \in A$.*
2. *$(A, <_1)$ no es isomorfo de orden con cualquier segmento inicial de A.*
3. *Si $(A_x, <_1) \approx (A_y, <_1)$ para $x, y \in A$, entonces $x = y$.*
4. *Si $(A, <_1) \approx (B, <_2)$, entonces existe un único isomorfismo de orden con dominio A y rango B.*

Demostración.

1. En caso contrario, $A_0 = \{x \in A : f(x) <_1 x, f(x) \neq x\} \neq \emptyset$ y así, existirá en A el menor elemento a de A_0 para el cual $f(a) <_1 a$, $f(a) \neq a$. Esto es una contradicción.
2. Supondremos lo contrario. Entonces, existirá algún $x \in A$ tal que $(A_x, <_1) \approx (A, <_1)$. Si $f : A \to A_x$ es un isomorfismo de orden, por *1* tendremos que $x <_1 f(x) \in A_x$, lo cual es una contradicción.
3. Si $(A_x, <_1) \approx (A_y, <_1)$, $x \neq y$, entonces, sin perder la generalidad, supondremos que $x <_1 y$, $x \neq y$. Entonces A_x es un segmento inicial de A_y, y esto es una contradicción con *2*. Por lo tanto, $x = y$.
4. Sean $f_i : A \to B$, $i = 1, 2$; isomorfismos de orden sobre B. Entonces $g = f_2^{-1}$ ó $f_1 : A \to A$ es un isomorfismo de orden y, luego, por *1* se tiene que $x <_1 g(x)$, o equivalentemente, $f_2(x) <_2 f_1(x)$, $x \in A$.

   De manera similar, se tendrá que $f_1(x) <_2 f_2(x)$, $x \in A$, y así $f_1 = f_2$.

□

Teorema 1.5.12 (Orden Lineal de Números Ordinales). *Si α y β son dos números ordinales, entonces*

$$\alpha < \beta \quad ó \quad \beta < \alpha \quad ó \quad \alpha = \beta,$$

donde "$<$" es como se dio en la definición 1.5.10. Así, un conjunto de números ordinales es linealmente ordenado.

Demostración. Sean $(A, <)$, $(B, <_1)$ conjuntos bien ordenados, con $Ord\, A = \alpha$ y $Ord\, B = \beta$.

Si $\alpha < \beta$, por el lema 1.5.11.*2.* y por la definición 1.5.10, se ve que $\alpha \neq \beta$. De manera similar, si $\beta < \alpha$, entonces $\beta \neq \alpha$.

Por el lema 1.5.11.*2.* también es cierto que $\beta \not< \alpha$, si $\alpha < \beta$.

Por lo tanto, a lo sumo una de las relaciones $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$ puede ser cierta.

Evidentemente, "$\leq$" es reflexiva (por el lema 1.5.11.*2.*), "$\leq$" es anti-simétrica; y por la definición 1.5.10, se ve que "$\leq$" es transitiva. Por lo tanto, "$\leq$" es un orden parcial en un conjunto de números ordinales.

Ahora, demostraremos que, dados dos numeros ordinales α y β, entonces, por lo menos una de las relaciones $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$ es cierta.

Sean $(A, <)$ y $(B, <')$ conjuntos bien ordenados con $Ord\, A = \alpha$ y $Ord\, B = \beta$.

Si $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, entonces $\alpha = \beta$.

Si $A = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $\alpha < \beta$.

Si $A \neq \emptyset$ y $B = \emptyset$, entonces $\beta < \alpha$.

Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Sea

$$\begin{aligned} F = \{f : f \text{ es isomorfismo de orden con} \\ \text{dominio, un segmento inicial de } A \text{ o } A \text{ mismo;} \\ \text{y rango, un segmento inicial de } B \text{ o } B \text{ mismo}\}, \end{aligned}$$

donde $f(\emptyset) = \emptyset$.

Si a y b son los menores elementos de A y B, respectivamente, entonces $f : A_a = \emptyset \to B_b = \emptyset$ es un miembro de F y así $F \neq \emptyset$.

En F introducimos el orden parcial $\leq$ dado por:

$f \leq g$ si el dominio D_f de f está contenido en el dominio D_g de g y si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f$.

Ahora, por el Principio Maximal de Hausdorff (ver 1.5.6.*3.*) existe una cadena C maximal en $(F, \leq)$. Sean $D_h = \bigcup_{f \in C} D_f$ y $h(x) = f(x)$ si $x \in D_f$. Como C es una cadena, h está bien definida.

Afirmamos que $h \in F$. En efecto, si $D_f = A$ para algún f, entonces es evidente que $D_h = A$ y $h = f \in F$. Por lo tanto, suponemos que $D_f = A_{x_f}$ para $f \in C$.

Si $f \leq g$, f, $g \in C$, entonces $A_{x_f} \subset A_{x_g}$ y así, $x_f < x_g$. Además, es obvio que

$$D_h = \{x \in A : x < x_f, x \neq x_f \text{ para algún } f \in C\}.$$

Si $D_h \neq A$, sea x_0 el menor elemento de $A \setminus D_h$. Entonces, dado $x \in D_h$, existe $f \in C$ tal que $x < x_f$, $x \neq x_f$. Si $x \notin A_{x_0}$, entonces $x_0 < x < x_f$, $x_0 \neq x_f$, lo cual implica que $x_0 \in D_h \cap (A \setminus D_h) = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $D_h \subset A_{x_0}$.

Si $A_{x_0} \setminus D_h \neq \emptyset$, entonces existe el menor elemento m de $A_{x_0} \setminus D_h$ para el cual se tiene que $m < x$, $m \neq x$. Esto es una contradicción, pues x_0 es el menor elemento de $A \setminus D_h$ que contiene a $A_{x_0} \setminus D_h$. Por lo tanto, concluimos que $D_h = A_{x_0}$, siempre que $D_h \neq A$. De manera similar, tendremos que el rango de h es un segmento inicial de B siempre que el rango de h no sea igual a B.

Por lo tanto, $h \in F$.

Afirmamos que el rango de h es B si $D_h = A_{x_0}$. En efecto, supondremos lo contrario. Entonces, el rango de h es un segmento inicial B_y para algún $y \in B$.

Definamos $h' : A_{x_0} \cup \{x_0\} \to B$ como

$$h'(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in A_{x_0}; \\ y, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Sean $A_1 = A_{x_0} \cup \{x_0\}$ y $B_1 = B_y \cup \{y\}$.

Entonces $B_1 = B$ o B_1 es el segmento inicial de B determinado por el menor elemento de $B \setminus B_1$ (ver el argumento anterior para demostrar que $D_h = A_{x_0}$, si $D_h \neq A$). En ambos casos, es obvio que $h' \in F$, $h \leq h'$ y $h \neq h'$. En consecuencia, $C_1 = C \cup \{h'\}$ es una cadena en F, que contiene a C estrictamente, lo cual contradice la maximalidad de la cadena C en F. Por lo tanto, el rango de h es B.

De manera similar, podemos demostrar que el dominio de h es A si el rango de h es un segmento inicial de B. Así, si $D_h = A$ y el rango de h es B, entonces $\alpha = \beta$.

Si $D_h = A_{x_0}$, entonces como vimos antes, $\beta < \alpha$.

De manera similar, si $D_h = A$ y $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha < \beta$.

La última parte del Teorema es una consecuencia inmediata de la primera parte y del hecho de que "$\leq$" es un orden parcial. Esto completa la demostración. $\square$

El próximo objetivo es el de demostrar la existencia del número ordinal Ω más pequeño tal que el segmento inicial P_Ω determinado por Ω sea no numerable. Con tal fin damos los siguientes lemas.

Lema 1.5.13. *Sean $\alpha > 0$ un número ordinal y P_α, el conjunto de todos los números ordinales β con $0 \leq \beta < \alpha$. Entonces P_α está bien ordenado con respecto al orden "$\leq$" de la definición 1.5.10 y $Ord\, P_\alpha = \alpha$. (Nótese que este resultado es consistente con los ejemplos 1.5.9).*

Demostración. Sean $(A, <_1)$ y $(B, <_1')$ conjuntos bien ordenados con $Ord\, A = \alpha$ y $Ord\, B = \beta$, donde $\beta \in P_\alpha$.

Como $\beta < \alpha$, existe $x_\beta \in A$ tal que $B \approx A_{x_\beta}$.

Por el Lema 1.5.11.*3*, el elemento x_β determinado por B es único en A y así, la función $f : P_\alpha \to A$ dada por $f(B) = x_\beta$, está bien definida y es inyectiva.

Para ver que f es sobreyectiva, sea $x \in A$. Entonces $A_x \subsetneq A$ y así, $Ord\, A_x = \beta < Ord\, A = \alpha$, lo cual implica que $f(\beta) = x$.

Por último, f preserva el orden, pues si $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$, $f(\beta_1) = x_1$ y $f(\beta_2) = x_2$, entonces $Ord\, A_{x_1} = \beta_1 < \beta_2 = Ord\, A_{x_2}$, lo cual implica que $x_1 < x_2$.

Como f es inyectiva, $x_1 \neq x_2$ si $\beta_1 \neq \beta_2$. Así, f es un isomorfismo de orden de P_α sobre A. Esto es, $Ord\, P_\alpha = Ord\, A = \alpha$. $\square$

Lema 1.5.14. *Si $\aleph$ es un número cardinal, entonces existe un número ordinal α con $|P_\alpha| = \aleph$, donde $|A|$ denota al número cardinal de A. (Nótese que si M es infinito, α no es único).*

Demostración. Si A es un conjunto con $|A| = \aleph$, entonces, por 1.5.9.*5*, existe un buen orden $<$ en A. Sea $Ord\,(A, <) = \alpha$.

Entonces, por el Lema 1.5.13, $Ord\, P_\alpha = \alpha$ y $|P_\alpha| = |A| = \aleph$. $\square$

El siguiente teorema será básico para la construcción de α-anillos y α-álgebras generados y para la construcción de algunos contraejemplos.

Teorema 1.5.15 (El menor número ordinal Ω con P_Ω no numerable). *Existe el menor número ordinal Ω tal que P_Ω es no numerable.*

Entonces:

1. *P_Ω está bien ordenado con respecto al orden "$\leq$" de la definición 1.5.10.*

2. *Para todo $\alpha \in P_\Omega$, P_α es a lo sumo numerable.*

3. *Si $C \subset P_\Omega$ y $|C| \leq \aleph_0$, entonces existe $\beta \in P_\Omega$ tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in C$.*

Demostración. Por el lema 1.5.14 existe un número ordinal γ tal que $|P_\gamma| = c$, donde $|\mathbb{R}| = c$.

Si cada miembro α de P_γ tiene solamente un número a lo sumo numerable de predecesores (i.e. $|P_\alpha| \leq \aleph$), pongamos $\Omega = \gamma$. En caso contrario, existirá un $\alpha \in P_\gamma$ tal que $|P_\alpha| > \aleph_0$. Sea $A = \{\alpha \in P_\alpha | P_\alpha| > \aleph_0\}$. Sea Ω el menor elemento de A. Tal Ω existe y pertenece a A, pues $A \neq \emptyset$ y $(A, \leq)$ está bien ordenado (ver 1.5.13).

1. P_Ω está bien ordenado en el orden "$\leq$" de 1.5.10 por el Lema 1.5.13.

2. Si $\alpha \in P_\Omega$, entonces $\alpha < \Omega$. Por lo tanto, $\alpha \notin A$, lo cual implica que $|P_\alpha| \leq \aleph_0$.

3. Sea $C \subset P_\Omega$. Si $\alpha \in C$, entonces $\alpha < \Omega$ y por *2.*, $|P_\alpha| \leq \aleph_0$.

   Si C es a lo sumo numerable y si $D = \cup\{P_\alpha : \alpha \in C\}$, entonces por el teorema 0.3.8, $|D| \leq \aleph_0$.

   Sea $\beta \in P_\Omega \setminus D$. Como P_Ω es no numerable y D es a lo sumo numerable, tal β existe.

   Entonces, para todo $\alpha \in C$, se tiene que $\alpha \leq \beta$. En caso contrario, $\beta < \alpha$ para algún $\alpha \in C$ y luego, $\beta \in P_\Omega \subset D$, lo cual es una contradicción.

   Así $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in C$.

Esto completa la demostración del teorema. □

Definición 1.5.16. *El número cardinal de P_Ω será denotado por $\aleph_1$.*

Hay otro axioma en la Teoría de Conjuntos, que es independiente del Axioma de Elección (ver P.J.Cohen, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50, 143-148, 1963), conocido como "*la Hipótesis del Continuo*".

Axioma 1.5.17 (La Hipótesis del Continuo). $\aleph_1 = c$.

En forma equivalente, para cada subconjunto infinito E de $\mathbb{R}$, $|E| = \aleph_0$ ó $|E| = c$.

Ahora, damos el Teorema de inducción transfinita, que generaliza la versión de inducción finita dada en términos de segmentos iniciales de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.5.18 (Teorema de Inducción Transfinita). *Sean $(W, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $S \subset W$ tal que $a \in S$ siempre que el segmento inicial $W_a \subset S$. Entonces $S = W$. (Nótese que el menor elemento de W está en S).*

Demostración. En caso contrario, $W \setminus S \neq \emptyset$ y como $(W, \leq)$ está bien ordenado, existe $a \in W \setminus S$ tal que a es el menor elemento de $W \setminus S$.

Entonces, $W_a = \{x \in W : x \leq a, x \neq a\}$ es disjunto con $W \setminus S$ y así, $W_a \subset S$. Pero, por hipótesis, esto implica que $a \in S$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S = W$. □

Sabemos que podemos definir una sucesión por una relación recurrente. Esto es posible debido al Teorema de Inducción Finita (en $\mathbb{N}$). De manera similar, podemos definir una función en un conjunto bien ordenado por recursión transfinita, de forma única, gracias al Teorema de Inducción Transfinita. Antes de enunciar el *Teorema de Recursión Transfinita*, necesitamos los conceptos que se dan en la siguiente definición.

Definición 1.5.19. *Sean $(W, \leq)$ un conjunto bien ordenado y X un conjunto no vacío. Sea $a \in W$.*

Si existe una función $g : W_a \to X$, entonces $\{g(b) : b \leq a, b \neq a\}$ o la misma función g se llama una sucesión de tipo *a en X.*

Cuando a es el menor elemento de W, $W_a = \emptyset$ y $g(\emptyset) = \emptyset$.

Si f es una función con dominio la colección de todas las sucesiones de tipo a en X, para todo $a \in W$ y con rango en X, entonces f se llama una función de sucesiones de tipo *W en X.*

Teorema 1.5.20 (Teorema de Recursión Transfinita). *Sean $(W, <)$ un conjunto bien ordenado y no vacío, y f una función de sucesiones de tipo W en X $(\neq \emptyset)$. Entonces existe una función $F : W \to X$, en forma única, tal que $F(\omega) = f\left(F(u) : u \in W_\omega\right)$.*

Demostración. Primero demostramos que F es única. Para esto, sea $G : W \to X$ otra función tal que $G(\omega) = f\{G(u) : u \in W_\omega\}$ para todo $\omega \in W$. Si $H = \{w \in W : G(\omega) = F(\omega)\}$, entonces el menor elemento a de W pertenece a H, pues $G(\emptyset) = F(\emptyset) = \emptyset$.

Si $W_\omega \subset H$ para algún $\omega \in W$, entonces para todo $u \in W_\omega$ tenemos que $F(u) = G(u)$, luego $F(\omega) = G(\omega)$. Así, $\omega \in H$ y por lo tanto, mediante el Teorema de Inducción Transfinita, concluimos que $F = G$ en W.

Para demostrar la existencia de F, damos el siguiente concepto:

Decimos que un subconjunto no vacío A de $W \times X$ es f-cerrado si $(\omega, f(t)) \in A$ siempre que $\omega \in W$ y t sea una sucesión de tipo ω contenida en A (en el sentido de que $(u, t(u)) \in A$ para todo $u \in W_\omega$).

Como $W \times X$ es f-cerrado, $F = \{A : A \subset W \times X, A \text{ es } f\text{-cerrado}\}$ es no vacía y así, $U = \bigcap\limits_{A \in F} A$ está bien definida.

Afirmación. U es f-cerrado.

En efecto, sean $\omega \in W$ y t una sucesión de tipo ω en X con el par ordenado $(u, t(u)) \in U$ para todo $u \in W_\omega$. Entonces, como cada A en F es f-cerrado, se tiene que $(\omega, f(t)) \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y así, $(\omega, f(t)) \in U$.

Sea $S = \{w \in W :$ existe a lo sumo un $x \in X$ tal que $(w, x) \in U\}$.

Como $W_a = \emptyset$, la sucesión t_0 de tipo a es $\emptyset$. Entonces, evidentemente el elemento $a \in S$.

Sea $W_y \subset S$ para $y \in W \setminus \{a\}$. Entonces, para cada $u \in W_y$ existe un elemento único $x_u \in X$ tal que $(u, x) \in U$. Así, la correspondencia $t : W_y \to X$ dada por $t(u) = x_u$ es una sucesión de tipo y en X.

Si $y \notin S$, entonces existe algún $x' \neq f(t)$ tal que $(y, x') \in U$, pues U es f-cerrado, e $y \notin S$. Entonces $V = U \setminus \{(y, x')\}$ es f-cerrado. En efecto, sean $z \in W$ y t' una sucesión de tipo z incluida en V. Si $z = y$, es claro que $(u, t'(u)) \in U$ para todo $u \in W_y$. Como $W_y \subset S$ se tiene que $t = t'$ y luego, $(z, f(t')) = (y, f(t)) \in V$. Si $z \neq y$, es evidente que $(z, f(t')) \in V$. Así, V es f-cerrado; lo cual contradice la Definición de U. Por lo tanto, $y \in S$.

Por el teorema de inducción transfinita se tiene que $S = W$. Es decir existe una función $F : W \to X$ tal que para cada $a \in W$, $F(a) = x$ donde x es el único elemento en X tal que $(a, x) \in U$.

Entonces, por la definición de F, se cumple: $F(a) = f(F(b) : bEW_a)$, $a \in W$.

Esto completa la demostración del teorema. $\square$

El teorema anterior permite definir una función F en un conjunto bien ordenado W, en forma única, si tenemos una función de sucesiones de tipo W en X. En este caso, decimos que F está definida por f, mediante inducción transfinita. En la construcción de σ-anillos generados, definimos una función en P_Ω por inducción transfinita. Antes de iniciar este estudio, consideramos la construcción de anillos generados.

Teorema 1.5.21 (Construcción de Anillos Generados). *Si C es una clase no vacía de conjuntos en X, entonces $R(C)$, el anillo generado por C, tiene la propiedad de que cada miembro de $R(C)$ está contenido en una unión finita de miembros de C; $R(C) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, donde $C_0 = C \cup C^\star$, $C_n = C^\star_{n-1}$ $n > 1$ y $E^\star$ es la colección de todas las uniones finitas de diferencias de miembros de la clase E de conjuntos.*

Si C es numerable, así lo será $R(C)$.

Demostración. Si

$$R = \left\{ E : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in C, i = 1, 2, \dots\ n, n \in \mathbb{N} \right\},$$

es obvio que $R(C)$ es un anillo y $R \supset C$. Por lo tanto, $R(C) \subset R$.

Sea E una clase no vacía de conjuntos. $E^\star$ denota a la colección de todas las uniones finitas de diferencias de miembros de E.

Afirmación 1. Si E es numerable y $\emptyset \in E$, entonces $E^\star$ es numerable.

En efecto, sea $E = \{E_1, E_2, \dots\}$.

Si $F = \{E_i \setminus E_j : i, j \in \mathbb{N}\}$, entonces $|F| \leq \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0$ y como $E \subset F$, se ve que $|F| = \aleph_0$.

Si $F_n = \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$, entonces, $\aleph_0 \leq |F_n| \leq \aleph_0^n = \aleph_0$. Es obvio que $E^\star = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ y por lo tanto, $|E^\star| = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

Si $\emptyset \in E$, se ve que $E \subset E^\star$.

Sea $C_0 = C \cup C^\star$. Entonces $\emptyset \in C_0$.

Sea $C_n = C^\star_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$C \subset C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n \dots \tag{1.4}$$

$C \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n \subset R(C)$, puesto que cada $C_n \subset R(C)$ para todo n.

Afirmación 2. $R(C) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$.

Basta probar que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ es un anillo.

Sean A y B en $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$. Entonces, por (1.4), existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que A y $B \in C_n$ y por lo tanto, $A \setminus B \in C_{n+1} \subset \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} C_m$. Además,

$$A \cup B = (A \setminus \{\emptyset\}) \cup (B \setminus \{\emptyset\}) \in C_{n+1} \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} C_m.$$

Por lo tanto, la afirmación 2 es cierta.

Cuando C es numerable, por la afirmación 1, cada C es numerable y así, $R(C) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ es numerable. Esto termina la prueba. $\square$

Corolario 1.5.22. *Si C es una clase no vacía de conjuntos en X, el álgebra $A(C)$ generada por C en X se da por*

$$A(C) = \{E : E \in R(C) \text{ o } E^c \in R(C)\}.$$

En consecuencia, si C es numerable, así lo será $A(C)$.

Demostración. Sea $A(C) = \{E : E \in R(C) \text{ o } E^c \in R(C)\}$.

Como $\emptyset \in R(C)$, $\emptyset^c = X \in A$.

Sean E_1 y $E_2 \in A$. Entonces

$E_1 \cup E_2 \in R(C)$ cuando E_1 y $E_2 \in R(C)$;

$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c = E_1^c \setminus E_2 \in R(C)$ si $E_1^c, E_2 \in R(C)$; asimismo, $(E_1 \cup E_2)^c \in R(C)$, cuando $E_1, E_2^c \in R(C)$;

Si $E_1^c, E_2^c \in R(C)$, entonces $(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c \in R(C)$.

Por lo tanto, en todos los casos, $E_1 \cup E_2 \in A$.

Por la definición, A es cerrada bajo la operación de complemento y, por lo tanto, A es un álgebra.

Como $C \subset A$, se ve que $A(C) \subset A$.

Recíprocamente, si $E \in A$, entonces E o $E^c \in R(C)$. Como $R(C) \subset A(C)$, se deduce que E y E están en el álgebra $A(C)$. Esto es, $A(C) = A$.

La última parte es evidente, ya que $\mathbb{R}(C)$ es numerable cuando C es numerable (ver el Teorema 1.5.21) y $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. $\square$

Proposición 1.5.23. *Sea C una clase no vacía de conjuntos en X. Si $E \in S(C)$, el σ-anillo generado por C, entonces existe una subclase C_1 a lo sumo numerable, de C tal que $E \in S(C_1)$.*

Demostración. Sea $S_0 = \bigcup\{S(D) : D \subset C, D \text{ a lo sumo numerable}\}$.

Dada una sucesión $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S_0$, sea $F_i \in S(D_i)$, $D_i \subset C$, D_i a lo sumo numerable, $i \in \mathbb{N}$.

Luego $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i \in S\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i\right) \subset S_0$ puesto que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ es a lo sumo numerable.

Dados F y G en S_0, $F \setminus G \in S(D_1 \cup D_2)$, donde $F \in S(D_1)$, $G \in S(D_2)$, $D_1 \cup D_2 \subset C$, D_1 y D_2 a lo sumo numerables.

Por lo tanto, S es un $\sigma-$anillo.

Afirmamos que $S(C) = S_0$. En efecto, si $E \in C$, entonces $E \in S(\{E\}) \subset S_0$. Por lo tanto, C y así $S(C)$, están contenidos en S_0. Recíprocamente, para cada $D \subset C$. $S(D) \subset S(C)$ y así $S_0 = \cup\{S(D) : D \subset C, D$ a lo sumo numerable$\} \subset S(C)$.

Ahora, si $E \in S(C)$, entonces $E \in S_0$ y así, existe una subclase C_1, a lo sumo numerable, de C tal que $E \in S(C_1)$. □

Proposición 1.5.24. *Si* $\mathbf{E}$ *es una clase no vacía de conjuntos en* X *y* A *es un subconjunto de* X*, entonces*

$$S(\mathbf{E}) \cap A = S(\mathbf{E} \cap A) = S\left(\{F : F = E \cap A, E \in \mathbf{E}\}\right).$$

Demostración. Sea C la clase de todos los conjuntos de la $B \cup (C \setminus A)$ donde $B \in S(\mathbf{E} \cap A)$ y $C \in S(\mathbf{E})$.

Afirmamos que C es un σ-anillo. En efecto, si $\{B_i \cup (C_i \setminus A)\}_{i=1}^{\infty} \subset C$, donde $B_i \in S(\mathbf{E} \cap A)$ y $C_i \in S(\mathbf{E})$ para $i = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cup (C_i \setminus A)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cup \left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \setminus A\right) \in C$$

, ya que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in S(E \cap A)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in S(E)$.

Sean $F_i = B_i \cup (C_i \setminus A) \in C$, $i = 1, 2$. Ya que $B_i \subset A$, $B_i^c \cap A^c = A^c$ y $B_i \cap A = B_i$, $i = 1, 2$. Así,

$$\begin{aligned}
F_1 \setminus F_2 &= \{B_1 \cup (C_1 \cap A^c)\} \cap \{B_2 \cup (C_2 \cap A^c)\}^c \\
&= (B_1 \cup (C_1 \cap A^c)) \cap (B_2 \cup (C_2 \cap A^c)) \\
&= B_1 \cap B_2^c \cap C_2^c \cup B_1 \cap B_2^c \cap A \cup C_1 \cap A^c \cap B_2^c \cap C_2^c \cup C_1 \cap A^c \cap B_2^c \cap A \\
&= B_1 \cap B_2^c \cap C_2^c \cup B_1 \cap B_2^c \cup C_1 \cap C_2^c \cap A^c \\
&= B_1 \cap B_2^c \cup (C_1 \cap C_2^c) \cap A^c \in C,
\end{aligned}$$

como $B_1 \cap B_2^c = B_1 \setminus B_2 \in S(\mathbf{E} \cap A)$ y $C_1 \setminus C_2 \in S(\mathbf{E})$. Por lo tanto, C es un σ-anillo.

Para todo $E \in \mathbf{E}$, se tiene que $E = E \cap A \cup E \setminus A$ y así, $E^c \in C$. Por lo tanto, $E \subset C$ y, en consecuencia, $S(\mathbf{E}) \subset S(C) = C$. Además,

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{E}) \cap A \subset C \cap A &= \{B \cup (C \setminus A) \cap A : B \in S(\mathbf{E} \cap A), C \in S(E)\} \\
&= \{B : B \in S(\mathbf{E} \cap A)\} \\
&= S(\mathbf{E} \cap A).
\end{aligned}$$

Pero $S(\mathbf{E}) \cap A$ es un σ-anillo y así $S(\mathbf{E} \cap A) \subset S(\mathbf{E}) \cap A$. En consecuencia, se tiene que $S(\mathbf{E}) \cap A = S(\mathbf{E} \cap A)$. □

El siguiente teorema da la relación entre la clase monótona y el σ-anillo generado por un anillo de conjuntos en X. Este resultado juega un papel importante en el estudio de la unicidad de la extensión de medidas σ-finitas y en la demostración de la existencia de la medida producto.

Teorema 1.5.25 (La Clase Monótona generada por un Anillo). *Sí R es un anillo de conjuntos en X, entonces $M(R) = S(R)$.*

En consecuencia, si M es una clase monótona que contiene a un anillo R, entonces M contiene a $S(R)$.

Demostración. Para cada $F \subset X$, sea

$$B(F) = \{E \subset X : E \setminus F, F \setminus E, E \cup F \subset M(R)\}.$$

Es obvio que $E \in B(F)$ si y sólo si $F \in B(E)$.

Afirmación 1. $R \subset B(F)$ para cada $F \in R$.

En efecto, si $E, F \in R$. entonces por ser R un anillo,

$$\{E \setminus F, F \setminus E, E \cup F\} \subset R \subset M(R).$$

Así, $E \in B(F)$, lo cual implica que $R \subset B(F)$.

Afirmación 2. $B(F)$ es una clase monótona si $B(F)$ es no vacía.

En efecto, sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, una sucesión monótona en $B(F)$.

Entonces, evidentemente tenemos que si $E_n \uparrow$,

$$(\lim_n E_n) \setminus F = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F) \in M(R),$$

$$F \setminus (\lim_n E_n) = F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \setminus E_n) \in M(R) \text{ y}$$

$$(\lim_n E_n) \cup F = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F) \in M(R).$$

Si $E_n \downarrow$, entonces tenemos que

$$(\lim_n E_n) \setminus F = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap F^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F) \in M(R),$$

$$F \setminus \lim_n E_n = F \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \setminus E_n) \in M(R) \text{ y}$$

$$(\lim_n E_n) \cup F = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup F = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F) \in M(R).$$

Afirmación 3 $M(R)$ es un anillo.

En efecto, sean $E \in M(R)$ y $F \in R$. Entonces, por la afirmación 1, $R \subset B(F)$ y por la afirmación 2, se tiene que $M(R) \subset M(B(F)) = B(F)$ y, por lo tanto, $E \in B(F)$, lo cual implica que $F \in B(E)$.

Como F es arbitrario en R, se tiene que $R \subset B(E)$ y por la afirmación 2 se deduce que $M(R) \subset B(E)$.

Si $E, F \in M(R)$, entonces $F \in B(E)$ y luego, $\{E \setminus F, F \setminus E, E \cup F\} \subset R \subset M(R)$, lo cual implica que $M(R)$ es un anillo.

Por la afirmación 3 y por 1.4.21, $M(R)$ es un σ-anillo y así, $M(R) \supset S(R)$. Como $S(R)$ es una clase monótona, se tiene que $S(R) \supset M(R)$. En consecuencia, se concluye que $M(R) = S(R)$.

Por último, si M es una clase monótona, que contiene a un anillo R, entonces $M \supset M(R) = S(R)$.

Esto completa la demostración del teorema. □

El siguiente teorema da la construcción del σ-anillo generado por una clase no vacía de conjuntos en X, donde usamos las propiedades del número ordinal Ω y definimos una función en P_Ω por inducción transfinita.

Teorema 1.5.26 (El σ-Anillo Generado). *Sea E una clase de conjuntos en X, que contiene a $\emptyset$. Sea $E_0 = E$. Para cada número ordinal $\alpha > 0$ o $0 < \alpha < \Omega$, definimos, por el teorema de recursión transfinita 1.5.20, $E_\alpha = (\bigcup E_\beta : \beta < \alpha)^\star$, donde $C^\star$ es la clase de todas las uniones numerables de diferencias de miembros de C y Ω es el menor número ordinal no numerable. Entonces tenemos:*

1. *Si $0 < \alpha < \beta < \Omega$, se cumple $E \subset E_\alpha \subset E_\beta \subset S(E)$.*
2. *$S(E) = \cup\{E_\alpha : \alpha < \Omega\}$*
3. *Si $\aleph_0 \leq |E| \leq c$, entonces $|S(E)| \leq c$. En efecto, si $|E| = \aleph$, $\aleph$ infinito, entonces $|S(E)| \leq \aleph^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $0 < \alpha < \beta$, $E_\alpha = \{\cup E_r : r < \alpha\}^\star \subset \{\cup E_r : r < \beta\}^\star = E_\beta$.

Además, $E_1 = (E_0)^\star = E^\star \supset E$, ya que $\emptyset \in E$. Por lo tanto, $E \subset E_\alpha \subset E_\beta$.

Supóngase que $E_r \subset S(E)$ para todos los números ordinales $r < \beta$, donde $0 < \beta < \Omega$.

Si $r = 0$, evidentemente, $E_0 \subset S(E)$. Entonces, $\{\cup E_r : r < \beta\}^\star$ es la colección de todas las uniones numerables de diferencias de miembros en $\{\cup E_r : r < \beta\} \subset S(E)$, por lo que, $\{\cup E_r : r < \beta\}^\star = E_\beta \subset S(E)$.

Sea $A = \{\alpha : 0 \leq \alpha < \Omega$ tal que $E_\alpha \subset S(E)\}$. Por lo que probamos arriba se ve que si el segmento inicial de α ($= P_\alpha$) en $(W, \leq) = ([0, \Omega), \leq)$ está contenido en A, entonces $\alpha \in A$. Por lo tanto, por el Teorema de Inducción Transfinita 1.5.18, $A = [0, \Omega)$. Esto implica que $E_\alpha \subset S(E)$ para todo $\alpha < \Omega$. Así,

1. Es cierta.

2. Sea $S = \cup\{E_\alpha : \alpha < \Omega\}$. Por *1.* se tiene que $E \subset S \subset S(E)$. Por lo tanto, basta probar que S es un σ-anillo.

   Sean $E, F \in S$. Entonces existen números ordinales r_1, r_2 en $[0, \Omega)$ tales que $E \in E_{r_1}$ y $F \in E_{r_2}$.

   Al tomar $C = \{r_1, r_2\}$ en *3* del teorema 1.5.15, tenemos un número ordinal $\beta < \Omega$ tal que $r_i \leq \beta$, $i = 1, 2$.

   Además, podemos escoger un número ordinal r tal que $\beta < r < \Omega$. En efecto, si suponemos lo contrario, entonces $P_\Omega = P_\beta \cup \{\beta\}$ será a lo sumo numerable por el teorema 1.5.15.*2*, lo cual es una contradicción con la primera parte del teorema 1.5.15.

   Así, $i < r$ para $i = 1, 2$, por lo que $E \setminus F \in (\cup\{E_\alpha : \alpha < r\})^\star = E_r \subset S$.

   Ahora, si $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset S$, entonces existen números ordinales $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ tales que $r_i < \Omega$ y $E_i \in E_{r_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $C = \{r_i\}_{i=1}^\infty$. Entonces por *3* del Teorema 1.5.15 y por el argumento anterior, existe un número ordinal $r < \Omega$ tal que $r_i < r$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

   $$\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in (\cup\{E_\alpha : \alpha < r\})^\star = E_r \subset S.$$

   En consecuencia, S es cerrada por diferencias y por uniones numerables de sus miembros y así, S es un σ-anillo, lo cual demuestra *2*.

3. $|E_0| = |E| = \aleph \geq \aleph_0$. $E_1 = (E_0)^\star$. Las diferencias de miembros de E forman un conjunto cuyo número cardinal es $\aleph^2 = \aleph$ y las uniones numerables de estas diferencias forman el conjunto E_1 con $|E_1| \leq \aleph^{\aleph_0}$. Por lo tanto, $|E_1| \leq \aleph^{\aleph_0}$.

   Supóngase que $|E_\alpha| \leq \aleph^{\aleph_0}$ para todos los números ordinales α tales que $0 \leq \alpha < \beta < \Omega$. Entonces

   $$\left|\bigcup_{\alpha<\beta} E_\alpha\right| \leq \aleph_0 \aleph^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} \quad \text{(ver 0.3.8)},$$

   ya que $|P_\beta| \leq \aleph_0$ por el teorema 1.5.15.*2*.

Por un argumento similar al dado antes tenemos que

$$|E_\beta| = \left|\left(\bigcup_{\alpha<\beta} E_\alpha\right)^\star\right| \leq \left\{\left(\aleph^{\aleph_0}\right)^2\right\} = \aleph^{\aleph_0} \quad \text{(ver 0.3.8)}.$$

Por lo tanto, $|E_\beta| \leq \aleph^{\aleph_0}$.

Si $S = \left\{\alpha : 0 \leq \alpha < \Omega, E_\alpha \leq \aleph^{\aleph_0}\right\}$, entonces $S \subset (W, \leq) = ([0,\Omega), \leq)$ tiene la propiedad de que siempre que $P_\alpha \subset S$ entonces $\alpha \in S$ y por lo tanto, por el teorema de inducción transfinita 1.5.20, concluimos que $S = [0,\Omega)$ y así,

$$|E_\alpha| \leq \aleph^{\aleph_0},\ \forall \alpha \in [0,\Omega).$$

Ya que $S(E) = \cup\{E_\alpha : 0 \leq \alpha < \Omega\}$,

$$|S(E)| \leq \aleph_1 \aleph^{\aleph_0},$$

donde $\aleph_1 = |P_\Omega|$.

Puesto que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$ y $\aleph^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = c$ (ver 0.3.8), tenemos que $\aleph_1 . \aleph^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$ (ver 0.3.8), y por tanto,

$$|S(E)| \leq \aleph^{\aleph_0}.$$

Cuando $\aleph_0 \leq \aleph \leq c$, tenemos que $\aleph^{\aleph_0} = c$ (ver 0.3.8) y luego, si $\aleph_0 \leq |E| \leq c$, entonces

$$|S(E)| \leq c.$$

La demostración es completa. □

Nota 1.5.27. *Si E no contiene a $\emptyset$ y si E es no vacía, podemos definir*

$$E_0 = E \cup \{E \setminus F : E, F \in E\}.$$

Entonces, como $S(E) = S(E_0)$, el teorema 1.5.26 se aplica a la clase E_0.

Nota 1.5.28. *Si $\emptyset \in E$, $A_\sigma(E) =$ la σ-álgebra generada por E en*

$X = \cup\{E_\alpha : \alpha < \Omega\}$, donde definimos

$$E_0 = E$$
$$C^\star = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \text{ o } A_n^c \in C, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$E_\alpha = \{\cup E_\beta : \beta < \alpha\}^\star, \quad \alpha > 0$$

*Si $|E| = \aleph$, $\aleph$ un número cardinal infinito, entonces $|A_\sigma(E)| \leq \aleph^{\aleph_0}$ (*Podemos probar estos resultados como en la demostración del teorema 1.5.26*).*

Definición 1.5.29. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. La σ-álgebra (= el σ-anillo) $\mathcal{B}(X)$, generada por la colección de todos los conjuntos abiertos (ó equivalentemente, cerrados) en X se llama la* **σ-álgebra de Borel** *en X y los miembros de $\mathcal{B}(X)$ se llaman* **conjuntos de Borel** *en X.*

Cuando X es localmente compacto y de Hausdorff, el σ-anillo $\mathcal{B}_0(X)$ (respectivamente, $\mathcal{B}_c(X)$), generado por la colección de todos los conjuntos compactos G_δs (respectivamente, compactos) en X se llama el **σ-anillo de Baire**. *(respectivamente* **σ-anillo de Borel** en el sentido de Halmos *[16] ó* **σ-anillo σ-boreliano***, ya que cada miembro de $\mathcal{B}_c(X)$ es σ-acotado en el sentido de que está contenido en una unión numerable de conjuntos compactos en X) y los miembros de $\mathcal{B}_0(X)$ (respectivamente, $\mathcal{B}_c(X)$) se llaman* **conjuntos de Baire** *(respectivamente,* **conjuntos de Borel** en el sentido de Halmos o **conjuntos σ-borelianos***).*

Proposición 1.5.30. *Si X es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable (esto es,* es segundo numerable*), entonces $|\mathcal{B}(X)| \leq c$.*

Demostración. Sea C una base numerable en X con $\emptyset \in C$. Entonces cada conjunto abierto en X es una unión numerable de miembros de C y por lo tanto, $C^\star = C_1$ (en e1 sentido del teorema 1.5.26) contiene a la colección de todos los conjuntos abiertos en X.

Así, $S(C) = S(C_1) \supset \mathcal{B}(X)$.

Ya que $C \subset \mathcal{B}(X)$, $S(C) \subset \mathcal{B}(X)$ y así, $S(C) = \mathcal{B}(X)$. (Nótese que el σ-anillo generado por C es una σ-álgebra y así, $S(C)$ es también la σ-álgebra generada por C).

$|S(C)| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c$ por el teorema 1.5.26.*3* y por lo tanto, $|\mathcal{B}(x)| \leq c$. $\square$

Corolario 1.5.31. *Si $\mathbb{R}^n = \prod_1^n \mathbb{R}$ es el espacio euclidiano de dimensión n con la topología dada por la norma $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, entonces $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c$.*

Demostración. $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable y por la proposición 1.5.30, $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| \leq c$.

Pero cada elemento $\{x\}$ en $\mathbb{R}^n$ es cerrado y así, pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, lo cual implica que $c \leq |\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|$. Por lo tanto, $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c$. □

El siguiente teorema generaliza el teorema 1.3.12 para medidas σ-finitas definidas en σ-anillos generados por retículos de conjuntos.

Teorema 1.5.32. *Sea S un σ-anillo de conjuntos en X. Supóngase que L es un retículo de conjuntos en X, que está contenido en S. Sean μ y υ dos medidas en S tales que $\mu(A) = \upsilon(A)$ para todo $A \in L$. Dado $E \in S(L)$, si existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en L tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y tal que $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in S(L)$.*

Demostración. Por la proposición 3.10, $P = \{A \setminus B : A, B \in L, B \subset A\}$ es un semi-anillo que contiene a L. Por lo tanto, a partir de 1.3.7, se deduce que

$$R(P) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i : E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j; E_i \in P, i = 1, 2, \ldots, n; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Primero asumiremos que μ y υ son medidas finitas en S.

Por hipótesis, para $A \setminus B \in P$ con $A, B \in L$ y $B \subset A$, se tiene que

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \upsilon(A) + \upsilon(B) = \upsilon(A \setminus B) \quad \text{(por 1.2.16).}$$

Por lo tanto, $\mu_{|P} = \upsilon_{|P}$.

Como μ y υ son finitamente aditivas, en particular se tiene que $\mu_{|R(P)} = \upsilon_{|R(P)}$, por la construcción de $R(P)$.

Sea $M = \{E \in S : \mu(E) = \upsilon(E)\}$. Entonces $R(P) \subset M$.

Afirmamos que M es una clase monótona. En efecto, como $R(P) \subset M$, M es no vacía.

Si $E_n \uparrow E$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, entonces por el lema 1.2.19, deducimos que

$$\mu(E) = \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \upsilon(E_n) = \upsilon(E)$$

y así, $E \in M$.

Si $E_n \downarrow E$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, entonces por el Lema 1.2.20, se tiene que $\mu(E) = \upsilon(E)$ y así, $E \in M$.

Como M es una clase monótona que contiene a $R(P)$, por el teorema 1.5.25, $M = S(R(P)) = S(P)$. Es decir, $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in S(P) = S(L)$.

Ahora, sea μ una medida no necesariamente finita, pero que cumpla la hipótesis del teorema si $E \in S(L)$; entonces, por hipótesis, existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset L$ con $\mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sean μ_n, υ_n las medidas finitas en S, definidas por

$$\upsilon_n(F) = \mu(F \cap B_n) \quad \text{y} \quad \upsilon_n(F) = \upsilon_n(F \cap B_n), \quad \forall F \in S,$$

donde $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Para $A \in L$, tenemos que

$$\mu_n(A) = \mu_n(A \cap B_n) = \upsilon(A \cap B_n) = \upsilon_n(A),$$

ya que $A \cap B_n \in L$ y $\mu_{|_L} = \upsilon_{|_L}$.

Como μ_n y υ_n son medidas finitas en S, por el caso discutido anteriormente, obtenemos que $\mu_n(F) = \upsilon_n(F)$ para todo $F \in S(L)$.

Ahora, se ve que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap E.$$

Como $B_n \cap E \uparrow$, por el Lema 1.2.19 tenemos que

$$\mu(E) = \lim_n \mu(B_n \cap E) = \lim_n \mu_n(E) = \lim_n \upsilon_n(E) = \lim_n \upsilon_n(B_n \cap E) = \upsilon(E).$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 1.5.33. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Sean μ y υ dos medidas finitas en $\mathcal{B}(X)$ tales que $\mu(U) = \upsilon(U)$ para todo conjunto U abierto en X o $\mu(F) = \upsilon(F)$ para todo conjunto F cerrado en X. Entonces $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}(X)$.*

Demostración. Sea $L_1 = \{U : U \text{ abierto en } X\}$. Entonces, evidentemente L_1 es un retículo de conjuntos en X y $S(L_1) = \mathcal{B}(X)$.

Asimismo, $L_2 = \{F : F \text{ cerrado en } X\}$ es un retículo de conjuntos en X y $S(L_2) = \mathcal{B}(X)$.

Ahora las conclusiones son evidentes por el Teorema 1.5.32. □

Definición 1.5.34. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Decimos que $A \subset X$ es* σ-acotado *(respectivamente,* acotado*) si existe una sucesión $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos compactos en X (respectivamente, un conjunto compacto C en X) tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ (respectivamente, $A \subset C$).*

Proposición 1.5.35. *Si X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces cada $E \in \mathcal{B}_c(X)$ es σ-acotado.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{B}_c(X)$ es el σ-anillo generado por todos los compactos en X. Entonces, por la proposición 1.5.23, existe $C = (C_n)_{n=1}^{\infty}$, cada C_n compacto, tal que $E \in S(C)$. Como cada miembro de $S(C)$ es un subconjunto de $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ (ver la construcción de $S(E)$ en 1.5.26), se ve que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y así, E es σ-acotado.

Alternativamente, sea

$$S = \left\{ E \subset X : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, C_n \text{ compacto en } X \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Entonces S es un σ-anillo y S contiene a la colección de todos los compactos en X. Por lo tanto $S \supset \mathcal{B}_c(X)$. □

Teorema 1.5.36. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Si μ y υ son dos medidas en $\mathcal{B}_0(X)$ (respectivamente, en $\mathcal{B}_c(X)$) tales que $\mu(C) = \upsilon(C) < \infty$ para todo compacto G_δ (respectivamente, compacto) C en X, entonces $\mu = \upsilon$.*

Demostración. Consideramos

$$L_1 = \{C \subset X : C \text{ compacto }, G_\delta\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{C \subset X : C \text{ compacto}\}.$$

Es obvio que L_2 es un retículo de conjuntos en X. Para probar que L_1 también es un retículo de conjuntos en X, sean $C_1, C_2 \in L_1$. Entonces existen $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que U_n y V_n son abiertos para $n \in \mathbb{N}$ y tales que $C_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ y $C_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Entonces

$$\begin{aligned} C_1 \cup C_2 = C_1 \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (C_1 \cup V_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m \right) \cup V_n \right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} (U_m \cup V_n). \end{aligned}$$

Como $U_m \cup V_n$ es abierto para cada m y n concluimos que $C_1 \cup C_2$ es un G_δ.

Además,$C_1 \cup C_2$ es compacto, por lo que $C_1 \cup C_2, C_1 \cap C_2 \in L_1$ obviamente.

Entonces, $S(L_1) = \mathcal{B}_0(X)$ y $S(L_2) = \mathcal{B}_c(X)$, por la definición 1.5.29.

Nótese que la Proposición 1.5.35 es cierta también para $E \in \mathcal{B}_0(X)$. Por lo tanto, para $E \in \mathcal{B}_0(X)$ (respectivamente, $E \in \mathcal{B}_c(X)$), la hipótesis del teorema 1.5.32 se cumple. En consecuencia, se tiene que $\mu(E) = \upsilon(E)$ para todo $E \in S(L_1) = \mathcal{B}_0(X)$ (respectivamente, $E \in S(L_2) = \mathcal{B}_c(X)$).

Esto completa la demostración del teorema. $\square$

1.6. Problemas Resueltos

En esta parte resolvemos algunos problemas interesantes, que complementan la teoría desarrollada en las secciones anteriores.

Problema 1.6.1 (Anillos de Conjuntos como Anillos de Boole). *Sea R un anillo de conjuntos en X. Probar que R es un anillo (*en el sentido de álgebra moderna*) bajo las operaciones de adición $(+)$ y producto $(\cdot)$, dadas por*

$$E + F = E \triangle F \quad y \quad E \cdot F = E \cap F, \quad E, F \in R,$$

y que $(R, +, \cdot)$ es un anillo de Boole en el sentido de que $E \cdot E = E$ para cada $E \in R$.

Además mostrar que si R es un álgebra de conjuntos en X, entonces $(R, +, \cdot)$ es un anillo con identidad. Nótese que un anillo de Boole es siempre conmutativo.

Solución. Como R es un anillo de conjuntos, se ve que

$$E \triangle F \in R \quad \wedge \quad E \cap F \in R, \quad \forall E, F \in R.$$

'+' es conmutativa, $E + E = 0$ $(0 = \emptyset)$ y $E + 0 = E$.

Además, '+' es asociativa. En efecto,

$$\begin{aligned}(E + F) + G &= E \cap F^c \cap G^c \cup E^c \cap F \cap G^c \cup E^c \cap F^c \cap G \cup E \cap F \cap G \\ &= E + (F + G).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(R, +)$ es un grupo abeliano.

Evidentemente, '$\cdot$' es conmutativa y asociativa.

$$\begin{aligned}E \cap (F \triangle G) &= E \cap F \cap G^c \cup E \cap F^c \cap G \\ &= (E \cap F) \triangle (E \cap G).\end{aligned}$$

Luego, $(R, +, \cdot)$ es un anillo.

Obviamente, $E \cdot E = E$ para $E \in R$.

Si $X \in R$, entonces $E \cdot X = E$ para todo $E \in R$.

Si B es un anillo de Boole, para $x \in B$ se tiene que $2x = (2x)^2 = 4x$ y así, $x + x = 0$.

Para $x, y \in B$, $(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+y+xy+yx$. Luego, $xy = -yx = yx$. $\square$

Problema 1.6.2 (La pseudo-métrica y la métrica inducida por una medida finita). *Sea μ una medida en un anillo R de conjuntos en X. Probar las siguientes* *afirmaciones:*

1. *Si $E \sim F$ cuando $\mu(E\triangle F) = 0$, para $E, F \in R$, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en R.*

2. *$S = \{E \in R : E \sim \emptyset\}$ es un anillo de conjuntos en X.*

3. *Si R es un σ-anillo de conjuntos en X, entonces $S = \{E \in R : E \sim \emptyset\}$ también es un σ-anillo de conjuntos en X.*

4. *$S = \{E \in R : E \sim \emptyset\}$ es un ideal del anillo $(R, +, \cdot)$, donde $+$ y $\cdot$ están definidas como en el Problema 1.6.1.*

5. *Si $\rho(E, F) = \mu(E\triangle F)$, $E, F \in R$, entonces ρ es una pseudo-métrica en R, siempre que μ sea finita.*

6. *Si $\widetilde{R} = R/\sim$,*
$$\widetilde{\rho}\left(\widetilde{E}, \widetilde{F}\right) = \rho(E, F), \quad E, F \in \widetilde{F},$$
está bien definida y es una métrica en R, siempre que μ sea finita. ($R/\sim$ denota la colección de todas las clases de equivalencia en R según $\sim$*. Si $\widetilde{E} \in \widetilde{R}$ y $E_1, E_2 \in \widetilde{E}$, entonces $E_1 \sim E_2$).*

Solución.

1. Basta probar que $\sim$ es transitiva.

   Sean $E \sim F$, $F \sim G$, $E, F, G \in R$. Entonces,
$$\begin{aligned}(E \cap G^c) \cup (G \cap E^c) &= (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G^c) \\ &\quad \cup (G \cap F \cap E^c) \cup (G \cap F^c \cap E^c) \\ &\subset (E \cap F^c) \cup (F \cap G^c) \cup (F \cap E^c) \cup (G \cap F^c) \\ &= (E\triangle F) \cup (F\triangle G) \text{ (6.2.1).} \end{aligned} \tag{1.5}$$

   Luego, $\mu(E\triangle G) = 0$.

2. $\emptyset \in S$.

   Si $E, F \in S$, entonces
$$\mu((E \cup F)\triangle\emptyset) = \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F) = 0$$
   y así, $E \cup F \in S$.

   Evidentemente, $E \setminus F \in S$.

3. Cuando R es un σ-anillo, si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0$$

   y así, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$.

4. Si $A \in (R, +, \cdot)$ y $E \in S$, $A \cdot E \in S$, ya que $A \cdot E = A \cap E$ y $\mu(A \cap E) \le \mu(E) = 0$.

5. Basta verificar la desigualdad triangular para ρ. Si $E, F, G \in R$,

$$\rho(E, F) = \mu(E \triangle F) \le \mu(E \triangle G) + \mu(G \triangle F) = \rho(E, G) + \rho(G, F)$$

   por (1.5) y por las propiedades de monotonía y sustractividad de μ.

6. Sean $E, E_1 \in \widetilde{E}$, $F, F_1 \in \widetilde{F}$. Entonces por *5* tenemos que

$$\mu(E \triangle F) = \rho(E, F) \le \rho(E, E_1) + \rho(E_1, F) = \rho(E_1, F) = \mu(E_1 \triangle F).$$

   Intercambiando E y E_1 tenemos que $\mu(E_1 \triangle F) \le \mu(E_1 \triangle F)$. Luego,

$$\mu(E \triangle F) = \mu(E_1 \triangle F) = \mu(E_1 \triangle F_1),$$

   lo cual demuestra que $\widetilde{\rho}$ está bien definida.

   Como ρ es una pseudo-métrica, $\widetilde{\rho}$ es una métrica.

□

Nota. Todas las afirmaciones, salvo *3*, son ciertas si μ es finita, no negativa, finitamente sub-aditiva y monótona en R con $\mu(\emptyset) = 0$.

Problema 1.6.3 (Una aplicación de los lemas 1.2.19 y 1.2.20). *Sean X un espacio métrico completo y separable y S una σ-álgebra de conjuntos en X, que contiene a $\mathcal{B}(X)$. Si μ es una medida en S con $\mu(X) = 1$, probar que existe un E en S tal que $\mu(E) = 1$ y E es una unión numerable de conjuntos compactos en X.*

Solución. Sea $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ denso en X.

Si d es la métrica de X, para $k, n \in \mathbb{N}$, sean

$$U_n^{(k)} = \left\{x : d(x_n, x) \le \frac{1}{k}\right\} \quad \text{y} \quad F_n^{(k)} = \bigcup_{m=1}^{n} U_m^{(k)}.$$

Por ser A denso en X,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{(k)} F_n^{(k)} = X$$

y como $F_n^{(k)} \uparrow$ para cada k fijo, por 1.2.19, se tiene que

$$\lim_{m} \mu\left(F_n^{(k)}\right) = \mu(X) = 1.$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(F_{n_1}^{(1)}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Obviamente, $F_{n_1}^{(1)} \cap F_n^{(2)} \uparrow F_{n_1}^{(1)}$ y por el argumento anterior, existe un $n_2 > n_1$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(F_{n_1}^{(1)} \cap F_{n_2}^{(2)}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Así, sucesivamente se obtiene una subsucesión $(n_i)_i^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}^{(i)}\right) > 1 - \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $F_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{n_i}^{(i)}$, que es cerrado y está en S.

$F_\varepsilon \neq \emptyset$, ya que $\mu(F_\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}^{(i)}\right) \geq 1 - \varepsilon > 0$, por 1.2.20.

F_ε es compacto. En efecto, por la hipótesis sobre X, basta ver que F_ε es totalmente acotado (ver 0.5.44.*7* y 0.5.44.*6*).

Dado $\delta > 0$, existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{i_0} < \delta$.

Como $F_\varepsilon \subset F_{n_{i_0}}^{(i_0)} = \bigcup_{m=1}^{n_{i_0}} U_m^{(i_0)}$, dado $x \in F_\varepsilon$, existe algún x_i $(1 \leq i \leq n_{i_0})$ tal que $d(x, x_i) \leq \dfrac{1}{i_0} < \delta$.

Por último, tomamos $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ y definimos $C_n = F_{\frac{1}{n}}$.

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ es una unión numerable de compactos C_n y

$$1 \geq \mu(E) \geq \mu(C_n) \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto último es $\mu(E) = 1$. □

Problema 1.6.4 (Ejemplo para las desigualdades estrictas en la Proposición 1.4.8). *Dar ejemplos para mostrar que las desigualdades en la Proposición 1.4.8 pueden ser estrictas.*

Solución. Sea m la medida de intervalos (ver 1.1.8).

Tomando $E_{2n} = (0,1]$, $E_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}, 2\right]$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\overline{\lim_n}\, E_n = (0,2] \quad \text{y} \quad m\left(\overline{\lim_n}\, E_n\right) = 2$$

$$\underline{\lim_n}\, E_n = \left(\frac{1}{2}\,,1\right] \quad \text{y} \quad m\left(\underline{\lim_n}\, E_n\right) = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\lim_n}\, m(E_n) = \max\left\{1\,,\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \underline{\lim_n}\, m(E_n) = \min\left\{1\,,\frac{3}{2}\right\} = 1.$$

□

Problema 1.6.5 (Partes válidas del Teorema 1.2.21 para semi-anillos).

1. *Probar que en el Teorema 1.2.21,* 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 5. *para semi-anillos.*
2. *Dar un contraejemplo para mostrar que las afirmaciones* 2. $\Rightarrow$ 1. *y* 4. $\Rightarrow$ 1. *en el teorema 1.2.21 no son ciertas para semi-anillos.*

   *(*Nota: Dado el interés de los autores en mostrar al lector, que el teorema 1.2.21 de caracterización de medidas sobre σ-anillos no se mantiene valido para caracterizar las medidas sobre semi-anillos; nos permitiremos aquí usar un conocido resultado sobre la unicidad de extensiones de medidas en σ-anillos. Este resultado, será mostrado en una futura ampliación de este texto. El resultado es el siguiente: **Teorema de unicidad de extension.** *Si μ es una medida σ-finita en un anillo de conjuntos $\mathcal{R}$, existe una extensión única $\overline{\mu}$ de μ al σ-anillo $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ generado por $\mathcal{R}$, como una medida en $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ y además, $\overline{\mu}$ es σ-finita.)*

Solución.

1. Si P es un semi-anillo de conjuntos en X y $\mu : P \to [0,\infty]$ es numerab1emente aditiva con $\mu(\emptyset) = 0$, entonces por 1.3.8 existe una extensión única $\overline{\mu}$ a $R(P)$ tal que $\overline{\mu}$ es una medida en $R(\mathcal{P})$ y si μ es finita así lo será $\overline{\mu}$.

   Ahora, por 1.2.21 aplicado a $\overline{\mu}$, 1. es inmediata.

2. Sean $\mathbb{Q}_0$ el conjunto de todos los números racionales en $[0,1]$ y

$$P = \{(a,b] \cap \mathbb{Q}_0 : 0 \leq a \leq b \leq 1,\ a, b \in \mathbb{Q}_0\}.$$

P es un semi-anillo. (Verificar)

Definimos $\mu((a,b] \cap \mathbb{Q}_0) = b - a$.

Si $E_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{Q}_0$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_i \in P$ $(i = 1, 2)$ y $E_1 \cup E_2 \in P$, sea $a_1 < b_1 = a_2 < b_2$.

$$\mu(E_1 \cup E_2) = b_2 - a_1 = b_2 - a_2 + a_2 - a_1 = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Por inducción finita, μ es finitamente aditiva en P y evidentemente, $\mu(\emptyset) = 0$.

Sean $E_n \uparrow E_0$, $E_n, E_0 \in P$, $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $E_n = (a_n, b_n] \cap \mathbb{Q}_0$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}_0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $a_0 \leq a_n$ y $b_0 \geq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $b_0 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $b_0 \in E_{n_0}$ y como $E_n \uparrow$, deducimos que $b_0 \in E_n$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia, $b_n = b_0$ para todo $n \geq n_0$.

En particular, $b_0 = \lim\limits_n b_n$.

Si $r \in E_0$ entonces $a_0 < r \leq b_0$, $r \in \mathbb{Q}_0$ y $r \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Luego, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \in E_{n_1}$ y así $a_{n_1} < r$ y $a_n < r$ para todo $n \geq n_1$.

Si $a' = \inf\limits_n a_n$, es evidente que $r > a' \geq a_0$ y así, tenemos que

$$E_0 \subset (a', b_0] \cap \mathbb{Q}_0 \subset (a_0, b_0] \cap \mathbb{Q}_0 = E_0.$$

Por lo tanto, $(a', b_0] \cap \mathbb{Q}_0 = (a_0, b_0] \cap \mathbb{Q}_0$.

Afirmamos que $a_0 = a'$. En caso contrario, $a_0 < a'$. Esto es imposible ya que los números racionales en (a_0, a') no pueden pertenecer a $(a', b_0] \cap \mathbb{Q}_0$, lo cual es una contradicción. Así, $a_0 = a'$.

Ahora,

$$\mu(E_0) = b_0 - a_0 = \lim_n (b_n - a_n) = \lim_n \mu(E_n),$$

ya que $\inf\limits_n a_n = \lim\limits_n a_n = a_0$ (pues $a_n \downarrow$). Es decir, μ es continua por abajo. De manera similar se ve que μ es continua por arriba.

Pero μ no es numerablemente aditiva en P. En efecto, si suponemos lo contrario, por 1.3.9, existirá una extensión única $\overline{\mu}$ de μ a $R(P)$ como una medida finita y por el *teorema de unicidad de extension* mencionado en la nota, existirá una extensión única μ_0 de μ como una medida σ-finita en $S(P)$.

Por 1.5.24, $S(P) = S(P_0) \cap \mathbb{Q}_0$, donde $P_0 = \{(a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

$\mathbb{Q}_0 \setminus \{0\} \in P \subset S(P)$.

Sea $\mathbb{Q}_0 \setminus \{0\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$;

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(\{x_i\}) &= \lim_{k\to\infty} \overline{\mu}\left(\left(x_i - \tfrac{1}{k}, x_i + \tfrac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}_0\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\left(x_i - \tfrac{1}{k}, x_i + \tfrac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}_0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0.\end{aligned}$$

Luego, $\overline{\mu}(\mathbb{Q}_0 \setminus \{0\}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(\{x_i\}) = 0$. Pero $\overline{\mu}(\mathbb{Q}_0 \setminus \{0\}) = \mu((0,1] \cap \mathbb{Q}_0) = 1$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Problema 1.6.6 (Una generalización de la medida de conteo). *Sean X un conjunto infinito, $S = P(X)$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos distintos de X. Definimos $\mu_n : S \to [0,\infty)$ por*

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & si\ x_n \in E; \\ 0, & si\ x_n \notin E. \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos y $\mu : S \to [0,\infty]$ es dada por $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E)$, probar que μ es una medida en S.

Obtener la medida de conteo como un caso particular.

Solución. Basta ver que μ es numerablemente aditiva.

Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Si $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, $E \in S_k$.

Si $E \cap (\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \emptyset$, se ve que $\mu(E) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Sea $E \cap \{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_{n_i}\}_{i=1}^{k}$, donde $k \in \mathbb{N}$ o $k = \infty$. Entonces

$$\mu_{n-i}(E) = 1,\ i = 1, 2, \ldots \quad \text{y} \quad \mu_n(E) = 0 \text{ si } n \notin \{n_1, n_2, \ldots\}.$$

Sea $J = \left\{i \in \mathbb{N} : E_i \cap \left(\{x_j\}_{j=1}^{\omega}\right) \neq \emptyset\right\}$. Para $i \in J$, sea $B_i = \{n_j : x_{n_j} \in E_i\}$. Entonces los conjuntos B_i son disjuntos en $\mathbb{N}$ y $\{n_1, n_2, \dots\} = \bigcup_{i \in j} B_i$. Ahora,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E) = \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} \mu_{n_i}(E) = \sum_{i=1}^{k} a_{n_i}.$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E_i) = \mu(E_i) = 0 \text{ si } i \notin J \quad \text{ y } \quad \mu(E_i) = \sum_{n_i \in B_i} a_{n_j} \text{ si } i \in J.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i \in J} \mu(E_i) = \sum_{i \in J} \sum_{n_j \in B_i} a_{n_j} = \sum_{\substack{n_j \in \cup B_i \\ i \in J}} a_{n_j} = \sum_{j=1}^{k} a_{n_j} = \mu(E).$$

Tomando $a_n = 1$, $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ y $X = \mathbb{N}$. Es fácil ver que en este caso μ coincide con la medida de conteo. $\square$

Problema 1.6.7 (Medidas semi-finitas). *Sea S un σ-anillo de conjuntos en X. Una medida μ en S se llama* semi-finita*, si cada $A \in S$ con $\mu(A) = \infty$ contiene a un $B \in S$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$.*

Si μ es una medida semi-finita en S y si $\mu(A) = \infty$, probar que existe un $C \in S$ tal que $C \subset A$, $\mu(C) = \infty$ y C es σ-finito.

Solución. Sea $\mu(A) = \infty$. Por hipótesis, $C = \{B \in S : B \subset A, 0 < \mu(B) < \infty\}$ es no vacío.

Sea $\sup_{B \in C} \mu(B) = \alpha \in (0, \infty]$. Entonces, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $\mu(B_n) \uparrow \alpha$.

Si $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces $C \in S$, $C \subset A$ y $\mu(C) \geq \sup_n \mu(B_n) = \alpha$.

Si $\mu(C) < \infty$, entonces $\mu(C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A) = \infty$ y así, $\mu(A \setminus C) = \infty$.

Por hipótesis, existe un $D \in S$ tal que $D \subset A \setminus C$ y tal que $0 < \mu(D) < \infty$. En consecuencia, $C \cap D \in C$ y $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D) > \alpha$, lo cual es una contradicción.

Luego, $\mu(C) = \infty$ y C es σ-finito. $\square$

Problema 1.6.8 (Suma directa de medidas). *Sea $(X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in I$; una colección no vacía de ternas, donde S_α es una σ-álgebra de conjuntos en X_α y μ_α es una medida en S_α. Supóngase que $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \subset Y$ y $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, para $\alpha \neq \beta$ en I. Si*

$X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ *y* $S = \{B \subset X : B \cap X_\alpha \in S_\alpha, \forall \alpha \in I\}$, *sea* $\mu(B) = \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha(B \cap X_\alpha)$, $B \in S$, *donde* $\sum_{\alpha \in I} t_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in J} t_\alpha : J \subset I, J \textit{ finito} \right\}$, *cuando* $t_\alpha \geq 0$ *para todo* $\alpha \in I$.

Probar las siguientes afirmaciones:

1. *Si* $\sum_{\alpha \in I} t_\alpha < \infty$, $I_0 = \{\alpha \in I : t_\alpha > 0\}$ *es a lo sumo numerable, donde* $t_\alpha \geq 0$ *para todo* $\alpha \in I$.

2. S *es una* $\sigma-$*álgebra de conjuntos en* X.

3. μ *es una medida en* S, *llamada la* medida suma directa *de* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in J}$.

4. μ *es* σ*-finita si y sólo si* $\{\alpha : \mu_\alpha \neq 0\}$ *es a lo sumo numerable y cada* μ *es* σ*-finita.*

Solución.

1. La hipótesis implica que

$$\sup \left\{ \sum_{\alpha \in I} t_\alpha : J \subset I, J \text{ finito} \right\} = M < \infty$$

Si $I_n = \left\{\alpha \in I : t_\alpha > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, se ve que $I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Si $J \subset I_n$ y $|J| = k$, entonces $\sum_{\alpha \in J} t_\alpha > \frac{k}{n}$, y así $k < M_n$; lo cual demuestra que cada I_n es finito y luego, I_0 es a lo sumo numerable.

2. Obviamente $X \in S$.

Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$, entonces $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cap X_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap X_\alpha) \in S_\alpha$ para todo α.

Si $E \in S$, $E^c \cap X_\alpha = X_\alpha \setminus X_\alpha \cap E \in S_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

Por lo tanto, S es una σ-álgebra en X.

3. Sea $(D, \geq)$, donde $D = \{J \subset I : J \text{ finito}\}$ y $J_1 \geq J_2$ si $J_1 \supset J_2$.

Entonces, $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido.

Sea $\mu_J(B) = \sum_{\alpha \in J} \mu_J(B \cap X_\alpha)$, $B \in S$. Se deja al lector verificar que $(\mu_J)_{J \in (D, \geq)}$ en una red no decreciente de medidas en S. Luego, por 1.4.16, $\mu = \sup_{J \in D} \mu_J$ es una medida en S.

4. Sea μ, σ-finita en S.

Entonces existe $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$, para $n \neq m$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $\mu \neq 0$.

Como $\mu(A_n) < \infty$, por *1.*, $I_n = \{\alpha : \mu_\alpha(A_n \cap X_\alpha) \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

Sea $\widetilde{I} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

$\widetilde{I}$ es a lo sumo numerable y para $\alpha \notin \widetilde{I}$, $\mu_\alpha(A_n \cap X_\alpha) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, $\mu_\alpha(X_\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap X_\alpha) = 0$, lo cual implica que $\mu \equiv 0$ para todo $\alpha \in I \setminus \widetilde{I}$.

Para $\alpha \in \widetilde{I}$, $\mu_\alpha(x_\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(A_n \cap X_\alpha)$, $\mu_\alpha(A_n \cap X_\alpha)$ es finita para todo n y por lo menos existe algún $\alpha \in \widetilde{I}$ con $\mu_\alpha \neq 0$.

Recíprocamente, sean $\mu_\alpha \equiv 0$ para todo $\alpha \in I \setminus \widetilde{I}$, donde $\widetilde{I}$ es a lo sumo numerable y sean las μ_α σ-finitas para $\alpha \in \widetilde{I}$. Por lo tanto, para $\alpha \in \widetilde{I}$ se tiene que

$$X_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{(\alpha)}, \quad Y_n^{(\alpha)} \in S_\alpha, \quad \mu_\alpha\left(Y_n^{(\alpha)}\right) < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sean $\left\{Y_n^{(\alpha)}\right\}_{\substack{\alpha \in \widetilde{I} \\ n \in \mathbb{N}}} = \{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $Z_m = Y_m \bigcup\limits_{\alpha \in I \setminus \widetilde{I}} X_\alpha$.

Entonces $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Z_m$ y

$$\mu(Z_m) = \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha(Z_m \cap X_\alpha) = \sum_{\alpha \in \widetilde{I}} (Z_m \cap X_\alpha) = \sum_{\alpha \in \widetilde{I}} (Y_m \cap X_\alpha),$$

donde $Y_m = Y_n^{(\alpha_0)}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0 \in \widetilde{I}$.

Luego, $\mu(Z_m) = \mu_{\alpha_0}\left(Y_n^{(\alpha_0)}\right) < \infty$. Es decir, μ es σ-finita en S.

□

Problema 1.6.9 (La estructura de X cuando la medida μ en una σ-álgebra de conjuntos en X toma un número finito de valores finitos).
Sea μ una medida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos en X con $0 < \mu(X) < \infty$. Si $\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es un conjunto finito, probar que $X = E_1 \cup \cdots \cup E_n \cup F$, donde $E_i \in \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $E_i \cap F = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, para que existe una sucesión no decreciente $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ de números positivos de tal modo que si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset E_k$, entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = \alpha_k$, $\mu(E_k) = \alpha_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $\mu(F) = 0$.

Dar un ejemplo para mostrar que la descomposición de X no es única.

Solución. Sean $\{0, \beta_1, \ldots, \beta_s\}$ el rango de μ, $\alpha_1 = \min\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, \mu(E) > 0\}$ y $E_1 \in \mathcal{A}$ con $\mu(E_1) = \alpha_1$.

Si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset E_1$, entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = \alpha_1$ por la definición de E_1.

Sea $\alpha_2 = \min\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, \mu(E) > 0, E \subset X \setminus E_1\}$, si esta colección es no vacía.

Tomamos $E_2 \in \mathcal{A}$, $E_2 \subset X \setminus E_1$ tal que $\mu(E_2) = \alpha_2$.

Es obvio que para $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \subset E_2$, $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = \alpha_2$, etc.

Como el rango de μ es un conjunto finito, en un proceso finito obtenemos una colección finita de conjuntos disjuntos $E_1, \ldots, E_n$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = 0$.

Hagamos $F = X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

Luego, $X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \cup F$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$, los cuales cumplen las propiedades mencionadas en el problema.

Sea X infinito no numerable. Definimos $\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ o } E^c \text{ es a lo sumo numerable}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Sean $\mu(E) = 1$ si E^c es a lo sumo numerable y $\mu(E) = 0$ si E es a lo sumo numerable.

Por 1.2.13.*5*, μ es una medida finita en $\mathcal{A}$, cuyo rango es un conjunto finito. Entonces, $X = E_1 \cup F = X \cup \emptyset$, donde E_1 es un subconjunto arbitrario de X con $F = E_1^c$, a lo sumo numerable. Por lo tanto, la descomposición no es única. $\square$

Problema 1.6.10 (El caso del problema 1.6.9 cuando $\mu(\mathcal{A})$ es infinito en $[0, \infty)$).

Sea μ una medida finita en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$. Si $\mu(\mathcal{A}) = \{\mu(E) : E \in A\}$ es un conjunto infinito, probar que existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, de elementos disjuntos dos a dos, con $0 < \mu(A) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Afirmamos que existe un $E_1 \in \mathcal{A}$ tal que $0 < \mu(E_1)$ y $0 < \mu(X \setminus E_1)$, y además el rango de μ en $E_1 \cap \mathcal{A}$ o en $E_1^c \cap \mathcal{A}$ es infinito. En efecto, en caso contrario μ tendrá su rango finito, lo cual es una contradicción.

Hagamos $A_1 = E_1$ si $\mu(E_1^c \cap \mathcal{A})$ es infinito y $A_1 = E_1^c$ si $\mu(E_1 \cap \mathcal{A})$ es infinito. Considerando la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} \cap A_1^c$, obtenemos un $A_2 \in \mathcal{A} \cap A_1^c$; tal que $\mu(A_2) > 0$ y $\mu(\mathcal{A} \cap A_2^c)$ es infinito, etc.

Entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, para $n \neq m$ y $\mu(A_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Problema 1.6.11 (Una Aplicación del Teorema 1.5.25).

Sea R un anillo de conjuntos en X. Sea ν una medida en $S(R)$, tal que dado $E \in S(R)$, existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ con la propiedad

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad y \quad \nu(E_n) < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si μ es otra medida en $S(R)$ tal que $\mu(E) \leq \nu(E)$ para todo $E \in R$, probar que $\mu(E) \leq \nu(E)$ para todo $E \in S(R)$.

Solución. Sea ν finita en $S(R)$.

$M = \{E \in S(R) : \mu(E) \leq \nu(E)\}$ contiene a R y es una clase monótona por 1.2.19 y 1.2.20. Entonces, por 1.5.25, $M \supset S(R)$ y luego, $M = S(R)$.

En el caso general, sea $E \in S(R)$.

Por hipótesis, existe $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ tal que $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\nu(E_n) < \infty$, para todo n.

Si $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, sean

$$\nu_n(A) = \nu(A \cap F_n) \quad \text{y} \quad \mu_n(A) = \mu(A \cap F_n), \; A \in S(R) \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

μ_n y ν_n son medidas finitas en $S(R)$, cumpliendo $\mu_n(A) \leq \nu_n(A)$ para todo $A \in R$. Luego, por la parte anterior, $\mu_n(A) \leq \nu_n(A)$ para todo $A \in S(R)$.

Por último,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap F_n\right) = \lim_n \mu(E \cap F_n) \\ &= \lim_n \mu_n(E) \leq \lim_n \nu_n(E) = \lim_n \nu(E \cap F_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap F_n\right) = \nu(E).\end{aligned}$$

□

Problema 1.6.12 (Un caso en el que $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}_c(X) = \mathcal{B}(X)$).

1. *Probar que en un espacio X, metrizable, localmente compacto y $\sigma-$compacto,*

$$\mathcal{B}_0(x) = \mathcal{B}_c(x) = \mathcal{B}(X).$$

   Deducir que en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Probar también, que en un espacio topológico X de Hausdorff, $|\mathcal{B}(X)| = c$ si $|X| > \aleph_0$ y si X tiene una base numerable para su topología.*

   Deducir que $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c$.

Solución.

1. Sea d la métrica de X.

Cada conjunto cerrado en X es un G_δ. En efecto, si F es cerrado en X, sea

$$U_n = \bigcup_{x \in F} \left\{ y : d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces, U_n es abierto y $U_n \supset F$.

Afirmamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = F$, pues en caso contrario existirán un $x_0 \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \setminus F$ y una bola $B\left(x_0, \frac{1}{n_0}\right)$ disjunta con F. Pero $x_0 \in U_{n_0}$ y por tanto $x_0 \in B\left(x, \frac{1}{n_0}\right)$ para algún $x \in F$, lo cual es una contradicción.

Cada compacto en (X,d) es cerrado, luego un G_δ. Por lo tanto, $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}_c(X)$.

Cuando X es además $\sigma-$compacto, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, con C_n compacto en X, $n = 1, 2, \ldots$.

Si F es cerrado en X, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap C_n) \in \mathcal{B}_c(X)$ y así, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_c(X)$.

$\mathbb{R}^n$ es un caso particular.

2. Por 1.5.30, $|\mathcal{B}(X)| \leq c$.

   Como X es de Hausdorff, cada elemento $\{x\}$ es cerrado en X.

   Por hipótesis, $|X| \geq \aleph_0$ y la colección $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos a lo sumo numerables de X está contenida en $\mathcal{B}(X)$.

   Pero $|\mathcal{C}| \geq \aleph_0^{\aleph_0} = c$, y así $|\mathcal{B}(x)| \geq c$. Luego, $|\mathcal{B}(X)| = c$.

   La última afirmación sobre $\mathbb{R}^n$ es inmediata por la primera parte de 2.

□

Problema 1.6.13 (Otros generadores de $\mathcal{B}_c(X)$).
Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Sean

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B}_c(X) : U \ \textit{abierto}\},$$
$$\mathcal{V} = \{U : U \ \textit{abierto y relativamente compacto en } X\}.$$

1. *Probar que todo conjunto abierto y $\sigma-$acotado en X está en $\mathcal{B}_c(X)$.*
2. *Probar que $\mathcal{B}_c(x) = S(\mathcal{U}) = S(\mathcal{V})$.*
3. *Probar que $X \in \mathcal{B}_c(X)$ si y sólo si X es $\sigma-$compacto.*

Solución.

1. Sea U abierto y $\sigma-$acotado en X. Existe $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos compactos en X, tal que $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n \setminus U$ es compacto y $\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus U) \in \mathcal{B}_c(x)$.

   Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$,
$$A \in \mathcal{B}_c(X) \quad \text{y} \quad U = A \setminus (A \setminus U) \in \mathcal{B}_c(X).$$

2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_c(X)$ y así $S(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}_c(X)$.

   Sea C compacto en X. Como X es localmente compacto, para cada $x \in C$, existe una vecindad V_x de x tal que $\overline{V}_x$ es compacta.

   Entonces, $C_n \subset \bigcup_{x \in C} V_x$ y como C es compacto, existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x_i} = V$ con $\overline{V}$ compacta.

   Por lo tanto, por 1., $V \in \mathcal{B}_c(x)$ y así, $V \in \mathcal{U}$.

   $V \setminus C$ es abierto y $V \setminus C \subset \overline{V}$. Nuevamente aplicando 1, se tiene que $V \setminus C \in \mathcal{B}_c(x)$ y $V \setminus C \in \mathcal{U}$. Luego, $C = V \setminus (V \setminus C) \in S(\mathcal{U})$ y
$$\mathcal{B}_c(X) \subset S(\mathcal{U}).$$

   Así, $\mathcal{B}_c(X) = S(\mathcal{U})$.

   Si $E \in V$, entonces E es abierto y relativamente compacto en X. Entonces, por 1, $E \in \mathcal{B}_c(X)$ y luego, $S(\mathcal{V}) \subset \mathcal{B}_c(X)$.

   El argumento anterior demuestra que, dado un compacto C en X, existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $C = V \setminus (V \setminus C)$.

   Como $V, V \setminus C \in \mathcal{V}$, se tiene que $C \in S(\mathcal{V})$. Luego, $\mathcal{B}_c(X) \subset S(\mathcal{V})$.

   Así, $\mathcal{B}_c(X) = S(\mathcal{V})$.

   En conclusión, $\mathcal{B}_c(x) = S(\mathcal{U}) = S(\mathcal{V})$.

3. Si X es $\sigma-$compacto, entonces $X \in \mathcal{B}_c(X)$.

   Recíprocamente, si $X \in \mathcal{B}_c(X)$, entonces, por 1.5.35, X es $\sigma-$acotado y luego, X es $\sigma-$compacto.

$\square$

Problema 1.6.14 ($\sigma-$**álgebra generada por una sucesión finita o infinita de conjuntos mutuamente disjuntos).**

Hallar la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ generada por

1. $\mathrm{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$, *donde cada* $E_i \neq \emptyset$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$, *y* $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$.

   ¿Cuál es $|\mathcal{A}|$*?*

2. $\mathrm{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$, *donde cada* $E_i \neq \emptyset$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$, *y* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X$.

   ¿Cuál es $|\mathcal{A}|$*?*

Solución.

1. Cuando E es una familia finita de conjuntos en X, $S(\mathrm{E}) = R(\mathrm{E})$.

   Sea $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E} \cup \{0\}$. Como los miembros de E son disjuntos dos a dos, se ve que $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}^\star = \{$todas las uniones finitas de miembros de E$\}$, donde para una clase $\mathcal{C}$ de conjuntos $\mathcal{C}^\star$ es tal como en el teorema 1.5.21.

   Ya que todos los miembros de E_0 son disjuntos dos a dos, se tiene que $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3 = \dots = \mathrm{E}_n = \dots$ y por lo tanto,

   $$R(\mathrm{E}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}_n = \mathrm{E}_1 \quad \text{y} \quad |R(\mathrm{E})| = 2^n,$$

   puesto que $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

   Además, cuando la unión de los miembros de E es X, $X \in R(\mathrm{E})$ y así, $R(\mathrm{E})$ es la $\sigma-$álgebra generada por E.

2. Cuando E es una familia numerable de conjuntos disjuntos en X, $S(\mathrm{E})$ se da por 1.5.26.

   Sea $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E} \cup \{0\}$. Como los miembros de E son disjuntos dos a dos, E_0 coincide con la colección de todas las diferencias de sus miembros. Luego $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_0^\star$ (ver 1.5.26) es la familia de todas las uniones a lo sumo numerables. Por el mismo razonamiento cada E_α $(k_\alpha < \Omega)$, tal como en 1.5.26, coincide con E_1 y así, por 1.5.26, $S(\mathrm{E}) = \cup\{\mathrm{E}_\alpha : 0 \leq \alpha < \Omega\} = \mathrm{E}_1$.

   Cuando la unión de los miembros de E es X, $S(\mathrm{E})$ es también la $\sigma-$álgebra generada por E. Entonces, $|\mathrm{E}_1| = \aleph_0^{\aleph_0} = c$ y así, $|S(\mathrm{E})| = c$.

$\square$

Problema 1.6.15 (Representación de una familia finita en un anillo de conjuntos como uniones disjuntos de miembros del anillo).
Sean $E_1, E_2, \dots, E_n$ *miembros de un anillo* R *de conjuntos en* X. *Probar que existe una familia finita de conjuntos* $\{F_1, \dots, F_m\}$ *en* R, *disjuntos dos a dos tal que cada* E_i *es una unión finita de los* F_j.

Solución. Para $E \subset X$, escribimos $E^1 = E$ y $E^{-1} = X \setminus E$.

Para cada $n-$ada ordenada $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$, donde $e_i = \pm 1$, definimos

$$E_\varepsilon = E_1^{e_1} \cap \cdots \cap E_n^{e_n}.$$

Si $\varepsilon_0 = (-1, -1, \dots, -1)$ entonces,

$$E_{\varepsilon_0} = E_1^{-1} \cap \cdots \cap E_n^{-1} = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Para $\varepsilon \neq \varepsilon_0$, se ve que $E_{\varepsilon_0} = E_1^{e_1} \cap \cdots \cap E_n^{e_n} \in R$, puesto que para algún k, $e_k = 1$.

Si $\varepsilon = (e_j, \dots, e_n) \neq \delta = (d_1, \dots, d_n)$, donde $e_i = \pm 1$, $d_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$; y si ε y δ son distintos de ε_0, entonces $E_\varepsilon \cap E_\delta = \emptyset$. En efecto, como $\varepsilon \neq \delta$, existe algún k, $1 \leq k \leq n$, tal que $\varepsilon_k = 1$ y $d_k = -1$ y así $E_\varepsilon \subset E_k$ y $E_\delta \subset X \setminus E_k$.

Afirmamos que $E_i = \bigcup\limits_{e_i = 1} E_\varepsilon$, $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$. En realidad, por la definición de E_ε, es obvio que $\bigcup\limits_{e_i = 1} E_\varepsilon \subset E_i$.

Ahora, sea $x \in E_i$. Definimos $\varepsilon' = (e_1, \dots, e_n)$, donde $e_1 = 1$ y $e_j = 1$ si $x \in E_j$ y $e_j = -1$ si $x \notin E_j$. Entonces $x \in E_\varepsilon$ y luego, $E_i = \bigcup\limits_{e_i = 1} E_\varepsilon$.

Evidentemente, hay a lo sumo $2^n - 1$ conjuntos de la forma E_ε, $\varepsilon \neq \varepsilon_0$. Llamando a tales conjuntos no vacíos $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ obtenemos la conclusión del problema. $\square$

Problema 1.6.16 (Miscelaneo). *Sea $\mathcal{S}$ un $\sigma-$anillo de conjuntos en X y supóngase que $\mathcal{S}$ no es una $\sigma-$álgebra.*

1. *Probar que $\mathcal{A} = \{E : E \in \mathcal{S} \text{ o } E^c \in \mathcal{S}\}$ es una $\sigma-$álgebra.*
2. *Si μ es una medida en $\mathcal{S}$, probar que $\overline{\mu}$ definida en $\mathcal{A}$ por*

$$\overline{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{si } E \in \mathcal{S}; \\ \infty, & \text{si } E^c \in \mathcal{S}. \end{cases},$$

   es una medida en $\mathcal{A}$.

3. *Si μ es una medida en $\mathcal{S}$, probar que $\underline{\mu}$ definida en $\mathcal{A}$ por*

$$\underline{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{si } E \in \mathcal{S}; \\ \sup\{\mu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{S}\}, & \text{si } E^c \in \mathcal{S}. \end{cases},$$

   es una medida en $\mathcal{A}$.

4. *Para $\beta \in [0,\infty]$, probar que $\mu_\beta : A \to [0,\infty]$ dada por*

$$\mu_\beta(E) = \begin{cases} \underline{\mu}(E) + \beta, & si\ E^c \in \mathcal{S}; \\ \mu(E), & si\ E \in \mathcal{S}. \end{cases},$$

es una medida en $\mathcal{A}$.

5. *Si ν es una medida en $\mathcal{A}$ tal que $\nu_{|\mathcal{S}} = \mu$, probar que $\nu = \mu_\beta$ para algún $\beta \in [0,\infty]$, siempre que μ sea una medida finita en $\mathcal{A}$.*

Solución.

1. Es obvio que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos en X.

   Si $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, sean $I_1 = \{n \in \mathbb{N} : E_n \in \mathcal{S}\}$ y $I_2 = \{n \in \mathbb{N} : E_n^c \in \mathcal{S}\}$. Entonces $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}$. Además,

$$\bigcup_{n\in I_1} E_n \in \mathcal{S} \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{n\in I_2} E_n\right)^c = \bigcap_{n\in I_2} E_n^c \in \mathcal{S}$$

   por 1.4.1 y 1.4.3. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{n\in I_2} E_n \in \mathcal{A}$ y luego, $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{A}$.

2. Basta probar que $\overline{\mu}$ es numerablemente aditiva en $\mathcal{A}$.

   Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ con $E_n \cap E_m = \emptyset$ para $n \neq m$, y $E = \bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$.

   Sean $I_1 = \{n \in N : E_n \in \mathcal{S}\}$ y $I_2 = \{n \in \mathbb{N} : E_n^c \in \mathcal{S}\}$.

   Notamos que I_2 contiene a lo sumo un elemento n. En efecto, si $n, m \in I_2$, $n \neq m$, entonces $E_n^c \cup E_m^c \in \mathcal{S}$ y como $E_n \cap E_m = \emptyset$, se tiene que $X = E_n^c \cup E_m^c \in \mathcal{S}$, lo cual es una contradicción.

   Si $I_1 = \mathbb{N}$ entonces $E \in \mathcal{S}$ y $\overline{\mu}(E) = \sum\limits_{n=1}^\infty (E_n)$.

   Si $I_2 = \{n_0\}$, entonces $E = \bigcup\limits_{n\neq n_0} E_n \cup E_{n_0}$. Sea $\bigcup\limits_{n\neq n_0} E_n = F$. Se ve que $E \notin \mathcal{S}$. Por lo tanto, $E^c \in \mathcal{S}$ y $\overline{\mu}(E) = \infty$. Como $E_{n_0}^c \in S$, $\overline{\mu}(E_{n_0}) = \infty$.

   Luego, $\overline{\mu}(E) = \sum\limits_{n=1}^\infty \overline{\mu}(E_n)$.

3. Sean $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, I_1, I_2, $\{n_0\}$ y F tales como en la solución de 2.

   Entonces $I_2 = \{n_0\}$ o $I_2 = \emptyset$.

   Si $I_2 = \emptyset$, entonces $\underline{\mu}(E) = \mu(E) = \sum\limits_{i=1}^\infty \mu(E_i) = \sum\limits_{i=1}^\infty \underline{\mu}(E_i)$.

   Cuando $I_2 = \{n_0\}$, $E = F \cup E_{n_0}$, $F \in \mathcal{S}$, $E_{n_0}^c \in \mathcal{S}$ y luego $E^c \in \mathcal{S}$.

Ahora, sea $\underline{\mu}(E_{n_0}) = \infty$. Entonces

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(G) : G \subset E, G \in \mathcal{S}\} \geq \sup\{\mu(G) : G \subset E_{n_0}, G \in \mathcal{S}\} = \infty.$$

Así, $\underline{\mu}(E) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{\mu}(E_i)$.

Ahora, sea $\underline{\mu}(E_{n_0}) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $G \in \mathcal{S}$ tal que $G \subset E_{n_0}$ y $\mu(G) > \underline{\mu}(E_{n_0}) - \varepsilon$.

$$\underline{\mu}(E) \geq \mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G) > \mu(F) + \underline{\mu}(E_{n_0}) - \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\underline{\mu}(E) \geq \mu(F) + \underline{\mu}(E_{n_0}) \tag{1.6}$$

Sea $G \in \mathcal{S}$ tal que $G \subset E$. Entonces $G \cap E_{n_0} = G \setminus (G \setminus E_{n_0}) \in \mathcal{S}$.

Como $G = \left(\bigcup_{i \neq n_0} E_i \cap G \right) \cup (E_{n_0} \cap G)$,

$$\begin{aligned} \mu(G) = \sum_{i \neq n_0} \mu(E_i \cap G) + \mu(E_{n_0} \cap G) &\leq \sum_{i \neq n_0} \mu(E_i) + \underline{\mu}(E_{n_0}) \\ &= \mu(F) + \underline{\mu}(E_{n_0}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\underline{\mu}(E) \leq \mu(F) + \underline{\mu}(E_{n_0}) \tag{1.7}$$

Por (1.6) y (1.7) se concluye que $\underline{\mu}$ es una medida en $\mathcal{A}$.

4. Sea $\beta \in [0, \infty]$. Veremos que μ_β es numerablemente aditiva.

   Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E, F, I_1, I_2 y $\{n_0\}$ tales como en la solución de 2.

   Si $I_1 = \mathbb{N}$,
   $$\mu_\beta(E) = \mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\beta(E_i).$$

   Sea $I_2 = \{n_0\}$. Luego, $E = F \cup E_{n_0}$ y $\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(F) + \underline{\mu}(E_{n_0})$ por 3.

   Ahora,
   $$\mu_\beta(E) = \underline{\mu}(E) + \beta = \mu_\beta(F) + \mu_\beta(E_{n_0}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\beta(E_i).$$

   Como $\mu_\beta(\emptyset) = 0$, μ_β es una medida en $\mathcal{A}$.

5. Sean ν una medida en $\mathcal{A}$ tal que $\nu_{|\mathcal{S}} = \mu$ y $E \in \mathcal{A}$ tal que $E^c \in \mathcal{S}$.

Ya que ν es monótona en $\mathcal{A}$, $\nu(E) \geq \nu(F) = \mu(F)$ para todo $F \subset E$, $F \in \mathcal{S}$ y así $\nu(E) \geq (E)$.

Como $\mu(X) < \infty$ por hipótesis, se tiene que $\underline{\mu}(E) < \infty$.

Tomemos $\beta \in [0, \infty]$ tal que $\nu(E) = \mu(E) + \beta$.

Sea $A \in \mathcal{A}$ con $A^c \in \mathcal{S}$.

$E = (E \cup A) \cap (E \cap A^c)$, $\;E \cap A^c = A^c \setminus (A^c \setminus E) \in \mathcal{S}$ y $\;E^c \cup A^c \in \mathcal{S}$.

Luego, $E \cap A \notin \mathcal{S}$ y $E \cap A \in \mathcal{A}$.

Sea $\nu(E \cap A) = \underline{\mu}(E \cap A) + r$. Entonces

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(E) + \beta = \nu(E) &= \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) \\ &= \underline{\mu}(E \cap A) + r + \underline{\mu}(E \setminus A) = \underline{\mu}(E) + r.\end{aligned}$$

Así, $\beta = r$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) &= \underline{\mu}(A \cap E) + \beta + \underline{\mu}(A \setminus E) \\ &= \underline{\mu}(A) + \beta = \mu_\beta(A).\end{aligned}$$

Si $A \in \mathcal{S}$, $\nu(A) = \mu(A) = \mu_\beta(A)$.

Por lo tanto, $\nu = \mu_\beta$.

$\square$

1.7. Ejercicios

1.1. Si μ es una medida en un anillo R de conjuntos en X y E, F y G están en R. Probar que

a) $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

b) $\mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G) = \mu(E \cup F \cup G) + \mu(F \cap G)$.

1.2. Sea X un espacio topológico de Haursdorff. ¿Cuándo todos los conjuntos abiertos en X forman una $\sigma-$álgebra en X?

1.3. Sea X un espacio topológico de segunda categoría en sí mismo. Sea R la colección de todos los subconjuntos E de X tales que E o E^c es de primera categoría en X. Probar que R es una $\sigma-$álgebra de conjuntos en X.

1.4. Sea R un anillo de conjuntos en X. Si $E, F \in R$, probar que para una medida μ en R, $\mu(E \triangle F) = 0$ implica que $\mu(E) = \mu(F)$.

¿Es el recíproco cierto?

1.5. *a*) Probar que $\overline{\lim\limits_n} E_n$ y $\underline{\lim\limits_n} E_n$ no cambian si omitimos un número finito de miembros de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, probar que $\lim\limits_n E_n = \emptyset$.

c) Mostrar que $\overline{\lim\limits_n} E_n = \left(\underline{\lim\limits_n} E_n^c\right)^c$ y $\underline{\lim\limits_n} E_n = \left(\overline{\lim\limits_n} E_n^c\right)^c$.

1.6. Sea R una clase de conjuntos en X, que cumple las siguientes condiciones:

a) $\emptyset \in R$ ($\Leftrightarrow R \neq \emptyset$).

b) Si $E, F \in R$, entonces $E \triangle F \in R$.

c) $E \cap F \in R$ siempre que $E, F \in R$.

Probar que R es un anillo de conjuntos.

Si además R es cerrado por intersección numerable, ¿Tiene R que ser un $\sigma-$anillo?

1.7. Sean X un conjunto infinito numerable y $S = P(X)$. Obtener una representación de $\mu(E)$, donde $\mu : S \to [0, \infty]$ es una medida finita, usando los valores que μ asume en cada elemento de X.

Probar que μ es también una función acotada en X.

1.8. Sean S un $\sigma-$anillo de conjuntos en X y μ una medida en $\mathcal{S}$. Para $E \in \mathcal{S}$, sea $\mu_E : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ dada por $\mu_E(F) = \mu(E \cap F)$. Probar que μ_E es una medida en

$\mathcal{S} \setminus \mu_E$, llamada *la restricción de μ a $S_E = \{F : F \subset E, F \in \mathcal{S}\}$*).

Probar que S_E es una $\sigma-$álgebra de conjuntos en E.

1.9. Si μ y ν son medidas en un $\sigma-$anillo $\mathcal{S}$ de conjuntos en X, probar:

a) $\mu + \nu$ es una medida en $\mathcal{S}$.

b) Si $\mu \geq \nu$, existe una medida $\lambda \in \mathcal{S}$ tal que $\mu = \nu + \lambda$.

c) Si μ es $\sigma-$finita, λ en *b)* es única.

d) Si μ no es $\sigma-$finita, λ no es única en *b)*.

1.10. Obtener explícitamente la construcción de la $\sigma-$álgebra generada por una clase no vacía de conjuntos.

1.11. Obtener la $\sigma-$álgebra y el $\sigma-$anillo generados por $\emptyset$ en X.

1.12. Obtener S(E) si E es una familia finita de subconjuntos de X. (Ayuda: Usar los problemas 1.6.15 y 1.6.14).

1.13. Si E es una colección infinita de conjuntos en X, probar que R(E) y E tienen el mismo número cardinal.

1.14. Si E es una clase no vacía de conjuntos en X, probar que cada miembro de S(E) se puede cubrir por una unión numerable de los miembros de E.

1.15. Sean R un anillo de conjuntos y $\nu : S(R) \to (-\infty, \infty)$ tal que $\nu(E_n) \to \nu(E)$ siempre que $E_n \uparrow E$ o $E_n \downarrow E$ en $S(R)$. Si $\nu(E) \geq 0$ para todo $E \in R$ probar que $\nu \geq 0$ en $S(R)$. (Ayuda: Usar 1.5.25).

1.16. Probar que $\mathcal{B}(X) = \{E \cap [0,1] : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, donde $X = [0,1]$, es el intervalo compacto, contenido en $\mathbb{R}$. (Ayuda: Usar 1.5.24).

1.17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Definimos $\lambda_0((a,b]) = f(b) - f(a)$. Para $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$, $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, definimos $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0(E_i)$. Mostrar que λ está bien definida en $R(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, es una extensión de λ_0 y es finitamente aditiva.

1.18. Si μ es una medida en un $\sigma-$anillo $\mathcal{S}$ de conjuntos en X y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de miembros de $\mathcal{S}$ con $\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) < \infty$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, probar que $\mu\left(\lim_n E_n\right) = \lim_n \mu(E)$.

1.19. Probar las afirmaciones del problema 1.6.2, salvo *3.*, cuando μ es finita, no negativa, sub-aditiva y monótona en R, con $\mu(\emptyset) = 0$.

1.20. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si $|X| = \aleph_0$, probar que $P(X) = \mathcal{B}(X)$ y luego, $|\mathcal{B}(X)| = 2^{\aleph_0} = c$.

1.21. Una clase $\mathcal{N}$ de conjuntos en X se llama *normal*, si $\mathcal{N}$ es cerrada bajo la operación de uniones numerables disjuntas y las intersecciones de sucesiones no crecientes. Probar que un $\sigma-$anillo es una clase normal y que una clase normal que es un anillo es un $\sigma-$anillo.

1.22. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos en X, probar que $M(\mathcal{A})$, la clase monótona generada por A es la $\sigma-$álgebra generada por A en X.

¿Es este resultado cierto si $\mathcal{A}$ es un anillo?

1.23. En $P(\mathbb{N})$ sea

$$\mu_n(E) = \begin{cases} \dfrac{\#E}{n}, & \text{si } E \text{ es finito;} \\ \infty, & \text{si } E \text{ es finito.} \end{cases}$$

donde $\#E$ denota al número de los elementos en E. Demostrar que μ_n es una medida en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\mu_n \downarrow \mu$, donde

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \subset \mathbb{N} \text{ y } E \text{ es finito;} \\ \infty, & \text{si } E \subset \mathbb{N} \text{ y } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Probar que μ no es una medida en $P(\mathbb{N})$. (Comparar con 1.4.17 y el ejercicio 1.24.)

1.24. Sea μ una medida $\sigma-$finita en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{S}$ de conjuntos en X con $\mu(X) = \infty$. Si $\mu_n = \frac{1}{n}\mu$, $n \in \mathbb{N}$, probar que $\mu_n \downarrow$ y que

$$\lim_n \mu_n(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu(E) < \infty; \\ \infty, & \text{si } \mu(E) = \infty. \end{cases} \quad , \ E \in \mathcal{S}.$$

Mediante este ejemplo, demostrar que $\inf_n \mu_n$ no es una medida en $\mathcal{S}$. (Comparar con 1.4.17 y el ejercicio 1.23.)

1.25. Sean $g : X \to Y$ una función cualquiera y $\mathcal{S}$ una $\sigma-$álgebra de conjuntos en X. Probar que $\Sigma = \{E : E \subset Y, g^{-1}(E) \in \mathcal{S}\}$ es una $\sigma-$álgebra en Y.

1.26. Sea $\mathcal{S}_n$ la $\sigma-$álgebra generada por $(0,1], (1,2], \ldots, (n-1,n]$ en $\mathbb{R}$. Probar que $S_n \subset S_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ no es una $\sigma-$álgebra en $\mathbb{R}$ ni es un $\sigma-$anillo. (Ayuda: $(0,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0,n]$. Nótese que $(0,n] \in \mathcal{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $(0,\infty) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$).

1.27. Mediante un contra-ejemplo, demostrar que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ no es un anillo, aunque $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son anillos de conjuntos.

1.28. Mediante un contra-ejemplo, demostrar que $R_1 \widehat{x} R_2$ no es un anillo, aunque R_1 y R_2 sean anillos o $\sigma-$anillos de conjuntos.

1.29. Dar una clase monótona $\mathcal{M}$ que contiene a $\emptyset$ y X, pero que no es una $\sigma-$álgebra de conjuntos en X.

1.30. Sean $\mathcal{S}$ un $\sigma-$anillo de conjuntos en X y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Si μ es una medida en $\mathcal{S}$ con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, probar que $\mu\left(\overline{\lim\limits_n} E_n\right) = 0$.

1.31. Si $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, probar que no existe ninguna sucesión infinita $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en W tal $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, donde $a > b$ significa que $b \leq a$ y $b \neq a$.

1.32. En el ejercicio 1.25, sean X e Y espacios topológicos y $g : X \to Y$ una función tal que $g^{-1}(U) \in \mathcal{S}$ para todo U abierto en Y. Probar que $g^{-1}(E) \in \mathcal{S}$ para todo $E \in \mathcal{B}(y)$. (Ayuda: Si U es abierto en Y, $U \in \Sigma$, donde Σ es tal como en el ejercicio 1.25)

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol. *Mathematical analysis*. @World student series edition. Addison-Wesley, Reading/Mass. [u.a.], 2 edition, 1974.

[2] Robert B Ash. *Measure, integration and functional analysis*. Academic Press, New York, 2014.

[3] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis*. Academic Press textbooks in mathematics. Dover Publications, Newburyport, 2000.

[4] Gearoid De Barra. *Measure theory and integration*. Woodhead Publ., Oxford [u.a.], reprint. edition, 2011. Literaturverz. S. 236.

[5] Sterling K. Berberian. *Measure and integration*. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2011. Enth. Literaturverz. S. 305 - 307 und Index.

[6] N. Bourbaki. *Intégration: Chapitres 1 à 4*. Bourbaki, Nicolas. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

[7] Percy J Daniell. A general form of integral. *Annals of mathematics*, pages 279–294, 1918.

[8] N. Dinculeanu. *Vector Measures*, volume 95 of *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*. Elsevier Science, Burlington, 2014.

[9] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[10] Nelson Dunford and Jacob T Schwartz. *Linear operators, part 1: general theory*, volume 10. John Wiley & Sons, 1988.

[11] Hans Hahn and Arthur Rosenthal. *Set functions*. University of New Mexico, Alburquerque, 1948.

[12] Paul R Halmos. *Measure theory*, volume 18. Springer, 2013.

[13] Paul R Halmos. *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*. Courier Dover Publications, 2017.

[14] Paul R Halmos. *Naive set theory*. Courier Dover Publications, 2017.

[15] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] P.R. Halmos. *Measure Theory.* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1950.

[17] IN Herstein. *Topics in algebra.* blaisdell pub Co., New York, 1964.

[18] Israel N Herstein. *Topics in algebra.* John Wiley & Sons, 2006.

[19] Edwin Hewitt and Karl Stromberg. *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Springer-Verlag, New york, 2013.

[20] John Horváth. *Topological vector spaces and distributions.* Courier Corporation, 2012.

[21] JL Kelley, I Namioka, et al. *Topological Vector Spaces*, volume 36. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1963.

[22] John L Kelley. *General topology.* Courier Dover Publications, New york, 2017.

[23] Hyman Kestelman. *Modern theories of integration.* Dover, New york, 1960.

[24] Andreĭ Nikolaevich Kolmogorov and Sergeĭ Vasil'evich Fomin. *Measure, Lebesgue integrals and Hilbert space.* Academic Press, New York, 1961.

[25] Kazimierz Kuratowski. *Topology: Volume I*, volume 1. Elsevier, 2014.

[26] Henri Lebesgue. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, volume 267. American Mathematical Soc., 2003.

[27] Edward James McShane. *Integration.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

[28] Jan Mikusiński. The bochner integral. In *The Bochner Integral*, pages 15–22. Springer, 1978.

[29] Marshall Evans Munroe. *Introduction to measure and integration*, volume 10. Addison-Wesley Reading, Mass., 1953.

[30] Isidor Pavlovich Natanson. *Theory of functions of a real variable.* Courier Dover Publications, 2016.

[31] Frigyes Riesz and Béla Sz Nagy. *Functional analysis.* Courier Corporation, 2012.

[32] Claude Ambrose Rogers. *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, 1998.

[33] H.L. Royden. *Real Analysis.* Macmillan, New York, 2 edition, 1968.

[34] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York.

[35] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[36] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill International Editions : Mathematics series. McGraw-Hill, Auckland [u.a.], 3. ed., [nachdr.] edition, 2010. Literaturverz. S. 335 - 336.

[37] S. Saks. *Theory of the integral.* Hafner, New York, 2 edition, 1937.

[38] M.H. Stone. *Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*, volume XV of *American Mathematical Society Colloquio Publication.* New York, 1974.

[39] A.E. Taylor. *General Theory of Functions and Integration.* Blaisdell Waltham, Mass, 1965.

[40] A.E. Taylor and D.C. Lay. *Introduction to Functional Analysis.* John Wisley, New York, 1980.

[41] E.C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* Oxford University Press, 2 edition, 1952.

[42] H.G. Tucker. *A Graduate Course in Probability.* Academic Press, New York, 1967.

[43] John Von Neumann. *Functional Operators (AM-21), Volume 1: Measures and Integrals.(AM-21)*, volume 21. Princeton University Press, 2016.

[44] A.C. Zaanen. *Integration.* North-Holland, Amsterdam, 2 edition, 1967.

Autores

Los autores y la Profesora Gnanambal, esposa del Profesor Panchapagesan.

Panchapagesan Thiruvaiyaru, Venkataramaiyer

Doctor of Phylosophy (Ph D.) (Matemáticas), University of Madras, India.
Ha desarrollado su carrera como docente e investigador en el Department of Mathematics, en el A.C.College of Technology y en el Ramanujan Institute of Mathematics, de la University of Madras de la India; así como en el Departamento de Matemáticas, de la facultad de ciencias de La Universidad de Los Andes de Venezuela; en las áreas de Análisis Funcional, Geometría de Espacios de Banach, Teoría de la medida y Topología. En estas universidades ha dirigido una cantidad extensa de tesis de grado, posgrado y doctorado, así como trabajos y proyectos de investigación publicados en revistas de reconocido prestigio. Ha contribuido como invitado por el editor del Handbook of Measure Theory ,Elsevier, North- Holland; así como reseñador en los paneles de Zentrablatt für Mathematik desde 1978, y de Mathematics Reviews desde 1989. Autor del libro The Bartle-Dunford-Schwartz Integral (Integration with Respect to a Sigma-Additive Vector Measure) publicado en Monografie Matematyczne - Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (IMPAN), Birkhäuser. Actualmente jubilado en Boston, USA.

Carlos Eduardo Cova Salaya

MgSc en Matemática, Universidad de Los Andes, Venezuela.
Ha desarrollado su carrera como docente e investigador en las áreas de Análisis Funcional y Topología de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de La Universidad de Los Andes, Venezuela; por más de 25 años, siendo miembro del grupo de investigación de Análisis Funcional, jefe del departamento de Matemáticas y miembro de la comisión curricular que redactó el proyecto de la carrera de matemáticas actual de la mencionada universidad. Realizó estudios de posgrado con el profesor Panchapagesan, con quien desarrolló investigaciones sobre equivalencias entre los teoremas de representación de Riesz y de Krein-Milman. En los últimos años ha trabajado en las universidades UNACH y UNEMI de Ecuador. Actualmente se desempeña como docente ocasional de La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo de Ecuador.

Zoraida Margarita Sivoli Barrios

Doctora en Ciencias Aplicadas, Universidad de Los Andes, Venezuela.
Ha desarrollado su carrera como docente e investigadora en las áreas de Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones de Evolución y Análisis Funcional en la Escuela Básica de la Facultad de Ingeniería de La Universidad de Los Andes, Venezuela; por más de 24 años, donde fue jefe del departamento de Cálculo. Es miembro del grupo de investigación de Ecuaciones Diferenciales del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Ha publicado artículos científicos en revistas de alto impacto en su área de investigación. En los últimos 6 años se ha desempeñado como docente ocasional investigadora de La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo de Ecuador, donde formó parte de la comisión que elaboró el proyecto de maestría en matemática que actualmente se dicta en esta institución. También ha trabajado como profesora del posgrado en matemáticas de la UNEMI de Ecuador.

TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA.

UNA LECTURA INICIAL

ISBN: 978-9942-42-541-6

2022

Panchapagesan Thiruvaiyaru, Venkataramaiyer
Doctor of Phylosophy (Ph.D.) (Matemáticas).
Universidad de Los Andes, Venezuela.

Carlos Eduardo Cova Salaya
MgSc en Matemática.
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).
Universidad de Los Andes, Venezuela.

Zoraida Margarita Sivoli Barrios
Doctora en Ciencias Aplicadas.
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).
Universidad de Los Andes, Venezuela.

ISBN: 978-9942-42-541-6
9 789942 425416

TEORÍA ABSTRACTA DE LA MEDIDA.
UNA LECTURA INICIAL